



लोक शिक्षण संचालनालय, म.प्र. भोपाल
द्वारा वर्ष 2023 के लिए जारी प्रश्न बैंक
का सम्पूर्ण हल



2 in 1
प्रश्न बैंक,
मॉडल पेपर

प्रश्न बैंक

(सेमेडियल मॉडल पेपर के प्रश्न उत्तर सहित)

₹१९८

उत्तर सहित
गणित

मॉडल पेपर
सहित

कक्षा
9

नई
ब्लू प्रिंट
सहित

सबसे कम पूल्य



गुप्ता बुक इण्डस्ट्रीज प्रा.लि. इन्दौर

www.jcdclasses.com

लोक शिक्षण संचालनालय, म.प्र. द्वारा जारी
प्रश्न बैंक का हल



प्रश्न बैंक

गणित - 9

2023

ब्लू प्रिंट (प्रश्न-पत्र का स्वरूप)

कक्षा - 9 वीं
विषय - गणित

पूर्णांक - 75
समय - 3.00 घण्टे

क्र.	इकाई एवं विषय वस्तु	इकाई पर आवंटित अंक	अंकवार प्रश्नों की संख्या					कुल प्रश्न
			1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	5 अंक	
1.	अध्याय-1 संख्या पद्धति	6	2	2	-	-	-	2
2.	अध्याय-2 बहुपद	10	4	1	-	1	-	2
3.	अध्याय-3 निर्देशांक ज्यामिति	8	4	2	-	-	-	2
4.	अध्याय-4 दो चरों वाले ऐविक समीकरण	8	4	2	-	-	-	2
5.	अध्याय-5 यूक्लिड ज्यामिति का परिचय	3	1	1	-	-	-	1
6.	अध्याय-6 रेखाएँ और कोण	5	3	1	-	-	-	1
7.	अध्याय-7 त्रिभुज	5	3	1	-	-	-	1
8.	अध्याय-8 चतुर्भुज	7	2	1	1	-	-	2
9.	अध्याय-10 वृत्त	6	2	-	-	1	-	1
10.	अध्याय-12 हीरोन का सूत्र	5	1	-	-	1	-	1
11.	अध्याय-13 पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	6	1	1	1	-	-	2
12.	अध्याय-14 सांख्यिकी	6	3	-	1	-	-	1
कुल योग (अंक)		75	30	24	09	12	-	18+5=23

2 / प्रश्न बैंक-2023

प्रश्न पत्र निर्माण हेतु विशेष निर्देश-

□ 40% वस्तुनिष्ठ प्रश्न, 40% विषयपरक प्रश्न, 20% विश्लेषणात्मक प्रश्न होंगे।

(1) प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक 30 वस्तुनिष्ठ प्रश्न होंगे। सही विकल्प, रिक्त स्थान, सही जोड़ी, एक वाक्य में उत्तर, सत्य-असत्य संबंधी प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक निर्धारित हैं।

(2) वस्तुनिष्ठ प्रश्नों को छोड़कर सभी प्रश्नों में आंतरिक विकल्प का प्रावधान होगा। यह विकल्प समान इकाई/उप इकाई से तथा समान कठिनाई स्तर वाले होंगे। इन प्रश्नों की उत्तर सीमा निम्नानुसार होगी-

अति लघु उत्तरीय प्रश्न	02 अंक	लगभग 30 शब्द
लघु उत्तरीय प्रश्न	03 अंक	लगभग 75 शब्द
विश्लेषणात्मक	04 अंक	लगभग 120 शब्द
	05 अंक	लगभग 150 शब्द

(3) कठिनाई स्तर - 40% सरल प्रश्न, 45% सामान्य प्रश्न, 15% कठिन प्रश्न

सत्र 2022-23 :

कक्षा-9वीं : विषय - गणित
कम किया गया पाठ्यक्रम

क्र.	इकाई	कम किये गये अध्याय/विषय वस्तु का सार
1.	अध्याय-4 दो चरों वाले रेखीय समीकरण	4.4 दो चरों वाले रेखीय समीकरण का आलेख
2.	अध्याय-7 त्रिभुज	7.6 एक त्रिभुज में असमिकान्य
3.	अध्याय-9 समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल	संपूर्ण अध्याय
4.	अध्याय-11 रचनाएं	संपूर्ण अध्याय
5.	अध्याय-12 हीरोन का सूत्र	12.3 चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात करने में हीरोन के सूत्र का अनुप्रयोग।
6.	अध्याय-13 पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	13.2 धनाभ और धन के पृष्ठीय क्षेत्रफल 13.3 एक लंब और वृत्तीय बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल 13.6 धनाभ धन का आयतन 13.7 बेलन का आयतन
7.	अध्याय-15 प्रायिकता	संपूर्ण अध्याय

मॉपल पेपर

विषय - गणित

कक्षा - ७वीं

पृष्ठांक : 75

समय : ३ घंटे

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

- (i) निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या परिमेय संख्या है-

(iii) शन्य बहुपत की घात है-

- (अ) 1 (ब) कोई भी पूर्ण संख्या
 (स) परिभासित नहीं (द) 0
(iii) मूल बिन्दु के निर्देशांक होते हैं-
 (अ) (1, 1) (ब) (1, 0)
 (स) (0, 0) (द) (0, 1)

(iv) समीकरण $x - 2y = 4$ के लिए निम्न में से कौन-सा एक हल है-

(अ) (4, 0) (ब) (0, 4) (स) (4, 2) (द) (8, 4)

- (v) गणितीज थेल्स का एक सबसे प्रसिद्ध शब्द है।

(अ) आवंशत्व (ब) पाइथोगोरम
(स) राजनीति (द) आइसीटी

(vi) व दो कोण जिनका योग 180° हो कहलाएँ।

(अ) पूरक कोण (ब) संपूरक कोण
(स) असमान दोषीय (द) असमान दोषीय

उत्तर- (ii) (अ) $(3 + \sqrt{23}) - \sqrt{23}$, (ii) स परिभाषित नहीं
 (iii) (स), (0, 0), (iv) (अ) (4, 0), (5) (ब) पाइथोगोरस, (6)
 (व) संपर्क कोण।

प्रश्न 2. उक्त स्थानों की परिक्षण-

- (i) समान भुजाओं वाले दो वर्ग होते हैं।

(ii) एक समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ होती हैं।

(iii) अर्द्धवृत्त का कोण होता है।

(iv) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल होता है आधार $\frac{1}{2}$ आधार x

.....

(v) शंकु का आयतन होता है।

(vi) सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण को कहते हैं।

उत्तर- (i) सर्वांगसम, (ii) वरावर, (iii) समकोण, (iv) ऊंचाई
 (शीर्षलम्ब), (v) $\frac{1}{2} \pi r^2 h$. (vi) बहुलक

6 प्रश्न 3. सही जोड़ी बनाइए।

कॉलम-(A)

- | | |
|--------------------------------|---------------------------|
| (i) $a^m \div a^n$ | (a) -1 |
| (ii) वहूपद $x+1$ का शून्यक है | (b) $(x-y)(x^2+y^2) + xy$ |
| (iii) $x^3 - y^3$ | (c) $(x+y)(x^2+y^2 - xy)$ |
| (iv) $x^3 + y^3$ | (d) प्रथम चतुर्थांश |
| (v) विन्दु $(2, 1)$ स्थित है | (e) चतुर्थ चतुर्थांश |
| (vi) विन्दु $(4, -1)$ स्थित है | (f) a^{m-n} |

उत्तर- (i) f, (ii) a, (iii) b, (iv)

प्रश्न 4. सत्य/असत्य लिखो-

(iii) दो चरों ताले प्रक घात समीकरण को ऐविक समीकरण

(iii) $y = a$ का आलेख x अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा है।

(iv) एक योग्य की तीन विमाएँ होती हैं।
(v) एक बिनु में द्विकर केवल एक ही रेखा खोनी जा सकती है।
(vi) एक विनु में द्विकर के लिए एक रेखा 120° से अधिक है।

(vi) एक त्रिमुणि के ताना काणा का दान 180 होता है।
उत्तर- (i) असत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य, (iv) असत्य, (v) असत्य,
(vi) सत्य।

प्रश्न 5. एक वाक्य/शब्द में उत्तर दो।

- (i) एक ऋजु कोण की माप क्या होती है?
 - (ii) दो चरों वाले रैखिक समीकरण का मानक रूप लिखिए।
 - (iii) समावहु त्रिभुज को प्रत्येक कोण की माप कितनी होती है?
 - (iv) किसी त्रिभुज में कम से कम कितने न्यून कोण हो सकते हैं?
 - (vi) अर्द्धवृत्त में भान्तिक कोण कैसा होता है?

उत्तर- (i) 180° , (ii) $ax + by + c = 0$, (iii) 60, (iv) दो, (v) समान्तर चतुर्भुज, (vi) समकोण।

प्रश्न क्र. 6 से 17 तक प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक आवंटित हैं।

प्रश्न 6. $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच की एक अपरिमेय संख्या लिखिए। अथवा

$\frac{1}{7}$ का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है?

प्रश्न 7. $9^{1/2}$ का मान क्या है? अथवा

$\frac{36}{100}$ का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है?

4 / प्रश्न बैंक-2023

प्रश्न 8. द्विघाती बहुपद का उदाहरण लिखिए। अथवा बहुपद $3x + 1$ का शृंख्य क्या है?

प्रश्न 9. बिन्दु (1, 2) और (3, 2) किस चतुर्धार्ष में हैं? अथवा

बिन्दु (-2, 7) में भूज व कोटि के मान क्या हैं?

प्रश्न 10. बिन्दु (3, 7) की अक्षों से दूरी क्या है? अथवा निर्देशांक अक्ष किसे कहते हैं?

प्रश्न 11. $2x + 3y = 4.37$ को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त कीजिए। अथवा

समीकरण $4x + 2y = 12$ के दो हर लिखिए।

प्रश्न 12. बिन्दु (2, 14) से जाने वाली दो रेखाओं के समीकरण लिखिए। अथवा

समीकरण $2x + 1 = x - 3$ को हल कीजिए।

प्रश्न 13. परिभाषित कीजिए “समान्तर रेखाएँ”。 अथवा

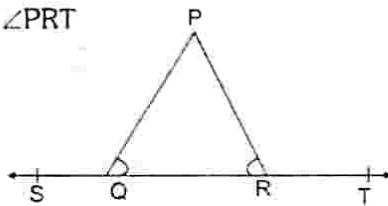
परिभाषित कीजिए “वृत्त की त्रिज्या”।

प्रश्न 14.



x व y के मान ज्ञात करो। अथवा

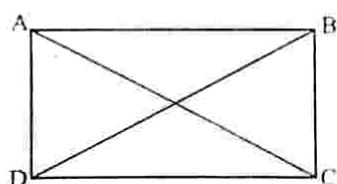
दी गई आकृति में $\angle PQR = \angle PRQ$ हैं तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PQS = \angle PRT$



प्रश्न 15. RHS सर्वासमता का नियम लिखिए। अथवा त्रिभुज किसे कहते हैं?

प्रश्न 16. चतुर्भुज $3 : 5 : 9 : 13$ के अनुपात में है। चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए। अथवा

यदि किसी समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हो तो दर्शाइए कि वह एक आयत है।

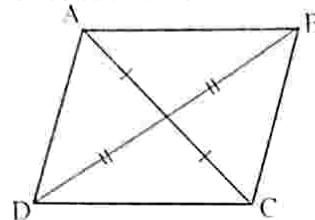


प्रश्न 17. एक शंकु की ऊँचाई 16 सेमी है और आधार की त्रिज्या 12 सेमी है। इस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3 + 4$) अथवा

एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसीकि ऊँचाई 21 मी. है और आधार का व्यास 24 मी. है।

प्रश्न क्रमांक 18 से 20 पर 3 अंक आवंटित हैं।

प्रश्न 18. दर्शाइए कि यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं, तो वह समचतुर्भुज होता है।



अथवा

दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

प्रश्न 19. एक शंकु की ऊँचाई 15 सेमी है। यदि इसकी आयतन 1570 सेमी³ है तो आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। अथवा धातु की एक गेंद का व्यास 4.2 सेमी है यदि इस धातु का घनत्व 8.9 ग्राम/सेमी³ है तो इस गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 20. इन दस नं पुस्तकों के 10 मैट्रा में निम्नलिखित गात्र त्रिज्या (2, 3, 4, 5, 6, 1, 8, 3, 4, 2) इन गात्रों की संख्या का माध्य मध्यिका और बहुलक ज्ञात करो। अथवा तीन सिक्कों को एक साथ 30 बार उछाला गया। प्रत्येक बार चित्त आने की संख्या निम्न है-

0, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 0, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 0, 1, 2, 1, 3, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 2, 2, 0

उपरोक्त दिये गए ऑकड़ों के लिये एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।

प्रश्न क्र. 21 से 23 प्रत्येक पर 4 अंक आवंटित हैं।

प्रश्न 21. मिल करो कि वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है। अथवा

मिल करो कि वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अन्तरित करती हैं।

प्रश्न 22. किसी त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः 40 m, 24 m व 32 m हैं तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात करो। अथवा

एक त्रिभुज की भुजाओं में अनुपात क्रमशः 12 : 17 : 25 है और उसका परिमाप 540 सेमी है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 23. गुणनखण्ड कीजिए- $6x^2 + 17x + 5$ अथवा गुणनखण्ड कीजिए- $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$

स्मरणीय बिंदु

- **प्राकृत संख्याएँ**- गिनती में उपयोग की जाने वाली संख्याएँ प्राकृति संख्या (Natural Numbers) कहलाती हैं। ये 1 से प्रारंभ होती है। इन्हे इस प्रकार प्रदर्शित करते हैं।
 $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
 - **पूर्ण संख्याएँ**- ये संख्याएँ शून्य से प्रारंभ होती है पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers) कहलाती हैं।
 - **W = {0, 2, 3, 4, 5,}** पूर्णांक- सभी पूर्ण संख्याएँ एवं प्राकृत संख्याओं के ऋणात्मकों के संग्रह को पूर्णांक (Integers) कहते हैं। इसे आई (I) से प्रदर्शित करते हैं।
 $I = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
 - **परिमेय संख्या**- एक संख्या R एक परिमेय संख्या कहलाती है, यदि इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके। जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ जैसे $\frac{5}{7}, \frac{11}{9}$ इत्यादि।
 - **अपरिमेय संख्याएँ**- एक संख्या S एक अपरिमेय संख्या कहलाती है, यदि उसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहा किया जा सके। p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$

जैसे- $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ इत्यादि।

- वे संख्याएँ, जिनका पूर्ण वर्ग धनात्मक हो, वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers) कहलाती है। इसे R से प्रदर्शित करते हैं।
 - सभी परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं को एक माथ लेकर बनने वाले संग्रह को वास्तविक संख्याएँ कहते हैं।
 - एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या अनवसानी आवर्ती।
 - एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है।
 - संख्या रेखा के प्रत्येक विन्दु के संगत एक वास्तविक संख्या होती है।
 - यदि a परिमेय संख्या है तथा b अपरिमेय तो, $(a + b)$ एवं $(a - b)$ अपरिमेय संख्या होगी।
 - यदि a परिमेय संख्या है और b अपरिमेय तथा $b \neq 0$ तो (a/b) एवं (a/b) अपरिमेय होगी।

- दो परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमित अनेक परिमेय संख्याएँ एवं अपरिमित अनेक अपरिमेय संख्याएँ होती हैं।
 - यदि a एवं b दो धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हो तो
 - $(1) \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
 - $(2) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
 - $(3) (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$
 - $(4) (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$
 - $(5) (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$
 - घातांक के नियम
 - $(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
 - $(2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
 - $(3) (a^m)^n = a^{mn}$
 - $(4) a^m \cdot b^m = (ab)^m$
 - $(5) a^0 = 1$ सदैव, जहाँ $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और m, n परिमेय संख्याएँ हैं।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

- (1) एक परिमेय तथा एक अपरिमेय संख्या का योगफल या अंतर सदैव एक संख्या होगी-

- (2) निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या परिमेय संख्या है-

- $$(a) (3 + \sqrt{23}) - \sqrt{23} \quad (b) \frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$$

- (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $(2 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5})$
 (3) यदि $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और p और q परिमेय संख्याएँ हैं तब निम्न में कौन सा सत्य है?

- $$(a) \frac{a^p}{a^q} = a^{p+q} \quad (b) (a^p)^q = a^{p+q}$$

- $$(c) \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

- (1) यदि $b > 0$ में वास्तविक संख्या है और

- (५) यादु > यहां यासाविका संख्या है जरा।

- पारम्पर लखाए तब निम्न म कान-सा असत्य ह:
5]

6 / प्रश्न बैंक-2023

(a) $b^m b^n = b^{m+n}$

(c) $b^m \div b^n = b^{n-m}$

(5) निम्न में से कौन सी परिमेय संख्या 1 व 2 के बीच नहीं है।

(a) $\frac{5}{4}$

(c) $\frac{17}{8}$

(6) किन्हीं दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल-

(a) सदैव एक अपरिमेय संख्या होती है।

(b) सदैव एक परिमेय संख्या होती है

(c) सदैव एक पूर्णांक

(d) कभी परिमेय कभी अपरिमेय संख्या

(7) इनमें से अपरिमेय संख्या है-

(a) $\sqrt{23}$ (b) $\sqrt{225}$

(c) $\sqrt{49}$ (d) 5.328

(8) $\sqrt{3}$ का दशमलव प्रसार है-

- | | |
|--------------------|-----------------------|
| (a) सांत | (b) असांत आवर्ती |
| (c) असांत अनावर्ती | (d) इनमें से कोई नहीं |

(9) एक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण नहीं हो सकता है-

- | | |
|--------------------|----------------------|
| (a) सांत | (b) असांत |
| (c) असांत व आवर्ती | (d) असांत व अनावर्ती |

(10) निम्न में से कौनसी एक अपरिमेय संख्या है-

(a) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (b) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

(c) $\sqrt{225}$ (d) $\sqrt{11}$

(11) $(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})$ का मान है-

- | | |
|-------|-------|
| (a) 0 | (b) 1 |
| (c) 3 | (d) 6 |

(12) $2^0 + \frac{2^0}{2^0}$ का मान होगा-

- | | |
|-------|-------|
| (a) 1 | (b) 0 |
| (c) 2 | (d) 3 |

(13) $\frac{6}{7}$ का दशमलव प्रसार है

- | | |
|---------------------|--------------|
| (a) 0.142857 | (b) 0.285714 |
| (c) 0.505005000.... | (d) 0.857142 |

(14) दो अपरिमेय संख्याओं का योगफल सदैव एक.....

संख्या होती है।

- | | |
|----------------------------|-----------------------|
| (a) परिमेय | (b) अपरिमेय |
| (c) कभी परिमेय कभी अपरिमेय | (d) इनमें से कोई नहीं |

(15) $[(100)^{\frac{1}{2}}]^2$ का मान है-

- | | |
|---------|----------|
| (a) 1 | (b) 10 |
| (c) 100 | (d) 1/10 |

(16) $(64)^{\frac{1}{2}}$ का मान है-

- | | |
|-------|-------------------|
| (a) 8 | (b) $\frac{1}{8}$ |
| (c) 6 | (d) $\frac{1}{4}$ |

(17) $\frac{p}{q}$ के रूप में 1,9999..... का मान, जहाँ p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ होगा-

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| (a) $\frac{19}{10}$ | (b) $\frac{19999}{10000}$ |
| (c) 2 | (d) $\frac{1}{9}$ |

(18) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$ का परिमेयकरण करने पर प्राप्त संख्या है-

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| (a) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$ | (b) $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$ |
| (c) $\frac{\sqrt{7}+2}{5}$ | (d) $\frac{\sqrt{7}-2}{5}$ |

(19) निम्न में से कौनसी अपरिमेय संख्या है-

- | | |
|----------|--------------------|
| (a) 0.23 | (b) 2.230230023000 |
| (c) 0.23 | (d) 0.2325 |

उत्तर- (1) (b) (2) (c) (3) (c) (4) (d) (5) (c) (6) (b)

(7) (a) (8) (c) (9) (b) (10) (b) (11) (b) (12) (b) (13)

(b) (14) (b) (15) (b) (16) (b) (17) (b) (18) (b) (19) (b)

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(1) सभी परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को एक साथ लेने पर संख्याओं का संग्रह प्राप्त होता है।

(2) संख्या r को परिमेय संख्या कहा जाता है यदि इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ p व q हैं और $q \neq 0$

(3) यदि r परिमेय संख्या है और s संख्या अपरिमेय है तब r + s और r - s संख्याएं होती हैं।

www.jcdclasses.com

- (1) $\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{6\sqrt{2}}{4}$ (a) a^{mn}

(2) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$ (b) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ (c) a^{m-n}

(4) $a^m \div a^n$ (d) $a^2 - b$

(5) $(a^m)^n$ (e) 5

उत्तर- (1) (b) (2) (d) (3) (e) (4) (c) (5) (a)

४६ सही चोटी क्वाता-

- | कॉलम-(A) | कॉलम-(B) |
|--|-------------------------|
| (1) $(125)^{\frac{1}{3}}$ | (a) $(a)^{\frac{a}{n}}$ |
| (2) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ | (b) $1/5$ |
| (3) $\sqrt{\frac{12}{3}}$ | (c) a^{m+n} |
| (4) $a^m \cdot a^n$ | (d) $a - b$ |
| (5) $(a^m)^n$ | (e) 2 |

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. परिमेय संख्याएँ क्या हैं?

हल- ऐसी सभी संख्याएँ जिन्हें p/q के रूप में लिखा जा सकता है। उन्हें परिमेय संख्याएँ कहते हैं। जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है।

जैसे- $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{4}{2}, \frac{5}{-7}, \sqrt{25}, \sqrt{225}$

प्रश्न 2. अपरिमेय संख्याएँ क्या हैं?

हल- ऐसी संख्या जिसे p/q के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q = 0$ को अपरिमेय संख्या के रूप में व्यक्त किया जाता है। अपरिमेय संख्या हमेशा $\sqrt{_}$ के रूप में होता है। जैसे- $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{29} \dots$

प्रश्न 3. $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच की एक अपरिमेय संख्या लिखिए।

हल- $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच की एक अपरिमेयसंख्या

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{7} + \frac{2}{7} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{7} \right] = \frac{3}{14}$$

प्रश्न 4. $\frac{1}{7}$ का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है?

हल- $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ www.jcdclasses.com

7) $10(0.1428571$

$$\begin{array}{r} -7 \\ \hline -30 \\ -28 \\ \hline 20 \\ -14 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \\ -35 \\ \hline 50 \\ -49 \\ \hline 10 \\ -7 \\ \hline 3 \end{array} \quad \frac{1}{7} = 0.\overline{14285714}$$

प्रश्न 5. ऐसी एक संख्या लिखिए जिसका दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती हो।

हल- $0.74074007400074000074\dots$

$0.6560656006560006560000656\dots$

$0.808008000800008\dots$

प्रश्न 6. $(9)^{\frac{1}{2}}$ का मान क्या होगा?

हल- $\sqrt{9} = \sqrt{(3 \times 3)} = 3$

प्रश्न 7. 3.142678 को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $p \neq q$ है।

हल- यहाँ $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ है अतः यह एक परिमेय संख्या है।

प्रश्न 8. सबसे छोटी प्राकृत संख्या कौन-सी है?

हल- 1 सबसे छोटी प्राकृत संख्या 1 है।

प्रश्न 9. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन सी है?

हल- सबसे छोटी पूर्ण संख्या 0 है।

प्रश्न 10. $\frac{36}{100}$ का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है?

हल- $\frac{36}{100} = 0.36$

दशमलव प्रसार सात है।

प्रश्न 11. वास्तविक संख्याएँ क्या हैं?

हल- यदि दूसरे शब्दों में कहा जाए तो वह सारी संख्या जिन्हें संख्याएँ (Numbers) या विद्युत संख्याएँ (Real numbers) कहा जाता है।

प्रश्न 12. $\frac{1}{6}$ और $\frac{1}{5}$ के बीच की एक परिमेय संख्या लिखिए।

हल- $\frac{1}{6} = 1/6 \times 5 \times 5 = 5/30 \times 2/2 = 10/60$

$1/5 = 1/5 \times 6/6 = 6/30 \times 2/2 = 12/60$

10/60 और 12/60 के बीच 11/60 परिमेय संख्या है।

1/6 और 1/5 के बीच की एक परिमेय संख्या 11/60 है।

प्रश्न 13. $\frac{7}{8}$ का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है?

हल-

8	0.875
7.0	
64	
60	
56	
40	
40	
0	

शेष : 6, 4, 0, भाजक : 6, 4, 0

$$\frac{7}{8} = 0.875$$

प्रश्न 14. $(4^3)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- $(4^3)^2$

$$= (4^2)^{1/3}$$

$$= (4 \times 4)^{1/3}$$

$$= (16)^{1/3}$$

$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2)^{1/3}$$

$$= 2(2)^{1/3}$$

$$= 2\sqrt[3]{2}$$

प्रश्न 15. दो परिमेय संख्याओं के बीच कितनी परिमेय संख्याएँ होती हैं?

हल- दो परिमेय संख्याओं के बीच में अनगिनत परिमेय संख्याएँ होती हैं।

प्रश्न 16. दो परिमेय संख्याओं के बीच कितनी अपरिमेय संख्याएँ होती हैं?

हल- दो परिमेय संख्याओं के बीच अनगिनत अपरिमेय संख्याएँ होती हैं।

प्रश्न 17. संख्या पद्धति क्या है?

हल- संख्याओं को लिखने और संख्याओं के नामकरण को व्यवस्थित करने की प्रक्रिया को संख्या पद्धति कहते हैं।

संख्या पद्धति में हम 0 से लेकर अनन्त तक की संख्याओं का बारे में पढ़ते और समझते हैं।

प्रश्न 18. $\left(\frac{1}{3^5}\right)^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- $\left(3^{\frac{1}{57}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

प्रश्न 19. क्या शून्य एक परिमेय संख्या है? क्या इसे आप

$\frac{p}{q}$ के रूप में लिख सकते हैं?

जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल- हाँ। शून्य एक परिमेय संख्या है। इसे हम p/q के रूप में लिख सकते हैं। जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

उदाहरण- $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ आदि

प्रश्न 20. क्या सभी धनात्मक पूर्णांकों के वर्गमूल अपरिमेय होते हैं? यदि नहीं तो एक ऐसी संख्या के वर्गमूल का उदाहरण दीजिए जो एक परिमेय संख्या है।

हल- नहीं, सभी धनात्मक पूर्णांकों के वर्गमूल अपरिमेय नहीं होते हैं। उदाहरण- 4 एक धनात्मक पूर्णांक है जिसका वर्गमूल एक परिमेय संख्या होती है। जैसे कि $\sqrt{4} = 2$

प्रश्न 21. बताइये नीचे दी गई संख्याओं में कौन-कौन परिमेय है और कौन-कौन अपरिमेय है-

$$(1) 2 - \sqrt{5} \quad (2) (3 + \sqrt{23}) - \sqrt{23} \quad (3) \frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} \quad (4) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(5) 2\pi$$

हल- (1) एक अपरिमेय संख्या (2) परिमेय संख्या (3) परिमेय संख्या (4) अपरिमेय संख्या (5) अपरिमेय संख्या।

प्रश्न 22. $(16)^{\frac{3}{4}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- $(16)^{\frac{3}{4}} = (2 \times 2 \times 2 \times 2)^{\frac{3}{4}}$

$$= (2)^{\frac{4 \times 3}{4}}$$

$$= 2^3 = 8$$

प्रश्न 23. सरल कीजिए- $(7)^{\frac{1}{2}} \cdot (8)^{\frac{1}{2}}$

हल- $(7)^{\frac{1}{2}} \cdot (8)^{\frac{1}{2}}$

$$= a^2 b^2 = (ab)^2$$

$$= 7^{\frac{1}{2}} 8^{\frac{1}{2}} = (7 \times 8)^{\frac{1}{2}} = 56^{\frac{1}{2}}$$

प्रश्न 24. ऐसी दो संख्याएँ लिखिए जिनके दशमलव प्रसार अनवसानी एवं आवर्ती हो।

हल- $16^{3/4}$

$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2)^{3/4}$$

$$= (24)^{3/4} = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$= 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

प्रश्न 25. जाँच कीजिए कि $7\sqrt{5}, \frac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2} + 21, \pi - 2$

अपरिमेय संख्याएँ हैं या नहीं-

हल- $\sqrt{5} = 2.236\dots, \sqrt{2} = 1.4142\dots, \pi = 3.1415\dots$ हैं।

तब $7\sqrt{5} = 15.652\dots, \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304$ हैं।

$$\sqrt{2} + 21 = 22.4142\dots, \pi - 2 = 1.1415$$

ये सभी अनवसानी अनावर्ती दशमलव हैं। अतः ये सभी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

प्रश्न 26. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल- $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (परिमेय)}$$

प्रश्न 27. $\frac{1}{\sqrt{7}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

$$\text{हल- } \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

प्रश्न 28. ज्ञात कीजिए- $(125)^{\frac{1}{3}}$

$$\text{हल- } (125)^{\frac{1}{3}} = (5 \times 5 \times 5)^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} \\ = 5^3 = 5^1 = 5$$

प्रश्न 29. $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$ में हर का परिमेयकरण कीजिये।

$$\text{हल- } \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} \\ = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} \\ = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{6})^2} \\ = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{7 - 6}$$

www.jcdclasses.com

प्रश्न 30. $(5 + \sqrt{7})(3 + 2\sqrt{2})$ को सरल कीजिये।

$$\text{हल- } (5 + \sqrt{7})(3 + 2\sqrt{2}) \\ = 15 + 3\sqrt{2} + 10\sqrt{2} + 2\sqrt{14}$$

प्रश्न 31. $\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ को सरल कीजिये।

$$\text{हल- } \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{5}{(\sqrt{3} - \sqrt{5})} \times \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})} \\ = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{3 - 5} = \left(\frac{-5}{2} \right) (\sqrt{3} + \sqrt{5})$$

प्रश्न 32. $(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ को सरल कीजिए।

$$\text{हल- } (\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \\ = (\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \\ = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 \quad \because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ = 3 - 5 \\ = -2$$

प्रश्न 33. $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$ को सरल कीजिए।

$$\text{हल- हम जानते हैं- } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ = (\sqrt{5})^2 + 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ = 5 + 2\sqrt{10} + 2 \\ = 5 + 2 + 2\sqrt{10} \\ = 7 + 2\sqrt{10}$$

प्रश्न 34. 1 और 2 के बीच पाँच परिमेय संख्या लिखिए।

हल- $\frac{r+s}{2}$, 1 और s के बीच स्थित होती है। अतः $\frac{3}{2}$, 1 और 2 के बीच की एक संख्या है।

1 और 2 के बीच चार और परिमेय संख्याएँ

$$\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8} \text{ और } \frac{7}{8}$$

प्रश्न 35. दिखाइए कि $0.3333\dots = 0.\bar{3}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$

हल- इसे हम x मान ले

$$\text{यद्यपि } 10x = 10 \times (0.333\dots) = 3.333\dots$$

$$\text{इसलिए } 3.333\dots = 3 + x \text{ जैसा कि } x = 0.3333 \text{ है।}$$

$$\text{इसलिए } 10x = 3 + x$$

x के लिए हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है।

$$9x = 3$$

$$\text{अर्थात् } x = \frac{1}{3}$$

प्रश्न 36. 3 और 4 के बीच में छः परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल- इस प्रश्न को हम दो विधियों से हल कर सकते हैं-

$$\text{विधि (1)} \quad \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}, \frac{7+3}{2} = \frac{7+6}{2} \\ = \frac{13}{2 \times 2} = \frac{13}{4}$$

$$\frac{\frac{13}{4} + 3}{1} = \frac{\frac{13+12}{4}}{2} = \frac{25}{4 \times 2} = \frac{25}{8}$$

$$\frac{\frac{25}{8} + 3}{2} = \frac{\frac{25+24}{8}}{2} = \frac{49}{8 \times 2} = \frac{49}{16}$$

$$\frac{\frac{49}{16} + 3}{2} = \frac{\frac{49+48}{16}}{2} = \frac{\frac{97}{16}}{2} = \frac{97}{32}$$

$$\frac{\frac{97}{32} + 3}{2} = \frac{\frac{97+96}{32}}{2} = \frac{\frac{193}{32}}{2} = \frac{193}{64}$$

अतः 3 और 4 के बीच छः परिमेय संख्या हैं

$$\frac{7}{2}, \frac{13}{4}, \frac{25}{8}, \frac{49}{16}, \frac{97}{32} \text{ तथा } \frac{193}{64}$$

प्रश्न 37. $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के बीच तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल- विधि 1. } \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{7}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7+3}{5} = \frac{10}{5}$$

$$\frac{10}{5} + \frac{3}{5} = \frac{10+3}{5} = \frac{13}{5}$$

$$\frac{13}{5} + \frac{3}{5} = \frac{13+3}{5} = \frac{16}{5}$$

www.jcdclasses.com

अतः $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के बीच पाँच परिमेय संख्या हैं

$$\frac{7}{5}, \frac{10}{5}, \frac{13}{5}, \frac{16}{5}, \frac{19}{5}$$

प्रश्न 38. ऐसी तीन संख्याएँ लिखिए जिनके दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती हों।

हल- ऐसी तीन संख्याएँ जिनके दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती हों-

$$(1) 0.1001000100001$$

$$(2) 20200220003200002\dots$$

$$(3) 0.003000300003$$

प्रश्न 39. निम्नलिखित भिन्नों को दशमलव रूप में लिखिए और बताइए कि प्रत्येक का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है-

$$(I) \frac{1}{11} \quad (II) \frac{329}{400}$$

हल- (I)

$$11) 100 (0.0909 \\ - 99 \\ \hline 100 \\ - 99 \\ \hline 1$$

$$\frac{1}{11} = 0.0909\dots = 0.\overline{09}$$

दशमलव प्रसार असांत, अनवसानी तथा पुनरावर्ती है।

$$(II) \frac{329}{400}$$

हल- $400) 3290 (0.8225$

$$\begin{array}{r} - 3200 \\ \hline 00900 \\ - 800 \\ \hline 1000 \\ - 800 \\ \hline 2000 \\ - 2000 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{अतः } \frac{329}{400} = 0.8225$$

दशमलव प्रसार सांत है।

प्रश्न 40. $2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ और $\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ को जोड़िए।

$$\begin{aligned} \text{हल-} &= 2\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 2 - 3\sqrt{3} \\ &= (2\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \\ &= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

प्रश्न 41. $6\sqrt{5}$ को $2\sqrt{5}$ से गुणा कीजिए।

$$\text{हल- } 6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60.$$

प्रश्न 42. $8\sqrt{15}$ से भाग $2\sqrt{3}$ दीजिए।

$$\text{हल- } 8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{8\sqrt{3 \times 5}}{2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$$

प्रश्न 43. 1 का परिमेयकरण कीजिए।

हल- 1 एक परिमेय संख्या है।

प्रश्न 44. सरल कीजिए- $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$

$$\begin{aligned} \text{हल-} &= 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} \\ &= (2)^{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}} \\ &= (2)^{\frac{10+2}{15}} \\ &= (2)^{\frac{12}{15}} \\ &= (2)^{\frac{13}{15}} \end{aligned}$$

प्रश्न 45. सरल कीजिए- (1) $\frac{11^{1/2}}{11^{1/4}}$ (2) $\left(\frac{1}{3^5}\right)^4$

$$\text{हल- (1)} \frac{11^{1/2}}{11^{1/4}}$$

$$= \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{ps}{qs}}$$

$$= \frac{11^{\frac{1}{4}}}{11^{\frac{1}{4}}} = 11^{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = 11^0$$

$$= 11^0 = 11^{\frac{1}{4}}$$

$$(2) \left(\frac{1}{3^5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1^{\frac{1}{3}}}{3^{5 \times \frac{1}{3}}} = \frac{1}{3^{\frac{5}{3}}} \\ = \frac{1}{3^{\frac{5}{3}}}$$

प्रश्न 46. सरल कीजिए-

$$(1) \left(\frac{1}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} (2) \frac{7^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{हल- } (1) \left(\frac{1}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}$$

$$(2) \frac{7^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{3}}} = (7^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}) = (7)^{\frac{5}{6}} = (7)^{\frac{5}{6}}$$

प्रश्न 47. $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल- हर का परिमेयकरण करने पर,

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{7}-2}\right) \times \frac{(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}+2)}$$

$$= \frac{\sqrt{7}+2}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$$

$$= \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}^2 - 2^2}$$

$$= \frac{\sqrt{7}+2}{7-4}$$

$$= \frac{\sqrt{7}+2}{3}$$

प्रश्न 48. स्पष्ट कीजिए कि एक परिमेय संख्या, अपरिमेय संख्या से कैसे भिन्न होती है?

हल- परिमेय संख्याओं में, अंश और हर, दोनों पूर्ण संख्याएँ होती हैं, जहाँ हर एक शून्य के बगवर नहीं होता है। जबकि एक अपरिमेय संख्या एक अंश में नहीं लिखी जा सकती। ऐसा संख्या जिसे हम के p/q रूप में व्यक्त कर सकते हैं और यहाँ q ≠ 0 होंगा उसे परिमेय संख्या कहते हैं। अपरिमेय संख्या जिसे हम p/q रूप में नहीं व्यक्त कर सकते हैं।

प्रश्न 49. सरल कीजिए- (a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (b) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

$$\text{हल- } (a) 2^{\frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} \\ = a^p \cdot b^q = (ab)^{\frac{p+q}{3}}$$

$$= 2^{2+1} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5+1+3}{3}} \\ = 2^{\frac{10}{3}} \\ = 2^{\frac{13}{3}}$$

उत्तर

$$(b) 7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} \\ = a^p \cdot b^q = (ab)^{\frac{p+q}{2}} \\ = (7 \times 8)^{\frac{1+1}{2}} = (56)^{\frac{1+1}{2}}$$

प्रश्न 50. सरल कीजिए- $\left(\frac{1}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\text{हल- } \left(\frac{1}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{3}}} = \frac{1}{3^1}$$

प्रश्न 51. निम्नलिखित व्यंजकों में से प्रत्येक व्यंजक को सरल कीजिए-

$$(1) (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) (2) (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$$

$$= 3(3 - \sqrt{3}) + \sqrt{3}(3 - \sqrt{3}) \\ = 3 \times 3 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$= 9 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3 \\ = 9 - 3 \\ = 6$$

$$(2) \text{ हम जानते हैं } = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= (\sqrt{5})^2 + 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$= 5 + 2\sqrt{10} + 2$$

$$= 5 + 2 + 2\sqrt{10}$$

$$= 7 + 2\sqrt{10}$$

प्रश्न 52. निम्नलिखित व्यंजकों को सरल कीजिए-

$$(1) (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{7}) (2) (\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$$

$$\text{हल- } (1) (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{7})$$

$$= 5\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + \sqrt{35} + \sqrt{14}$$

$$(2) (\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$$

$$(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 \quad \{ \because (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \}$$

$$= (\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 \\ = 3 + \sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$$

प्रश्न 53. दिखाइए कि $0.33333\dots = 0.3$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल- $x = 0.3333\dots$

$$10x = 10 \times (0.333\dots) = 3.3333\dots$$

अब $3.333\dots = 3 + x$ चूंकि $x = 0.3333\dots$ है

इसलिए $10x = 3 + x$

x के लिए हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है

$$9x = 3$$

अर्थात् $x = 1/3$

प्रश्न 54. दिखाइए कि $0.2353535 = 0.235$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल- मान लीजिए $x = 0.\overline{235}$ है।

माना $x = 0.235353\dots$

x का 100 से भाग करने हैं

$$100x = 23.53535\dots$$

इसलिए $100x = 23.3 + 0.23535 = 23.3 + x$

अतः, $99x = 23.3$

अर्थात् $99x = 23.3$ जिससे $x = \frac{233}{990}$ हुआ

प्रश्न 55. 0.6 को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल- मान कि

$$x = 0.\overline{6} = 0.666\dots$$

(एक अंक की पुनरावृत्ति)

$$10x = (10 \times 0.6666) = 0.666$$

इसलिए $10x = 6 + x$

$$10x - x = 6$$

$$9x = 6$$

$$x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$x = 0.6 = \frac{2}{3}$$

यहाँ $p = 2$ तथा $q = 3 (\neq 0)$

प्रश्न 56. 0.47 को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल- माना कि $x = 0.\overline{47} = 0.4777$

$$\text{तो } 10x = (10 \times 0.4777) = 4.7777$$

चूंकि 1 अंक की पुनरावृत्ति

$$10x = 4.3 + 0.4777$$

$$10x = 4.3 + x$$

$$10x = x = 4.3$$

$$9x = 4.3$$

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{43}{90}$$

$$x = \frac{43}{90}$$

प्रश्न 57. आप जानते हैं कि $\frac{1}{7} = 0.142857$ है। वास्तव में लंबा भाग दिए बिना क्या आप यह बता सकते हैं कि $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ के दशमलव प्रसार क्या है? यदि हों तो कैसे?

हल- $\frac{1}{7} =$

$$10 \times 0.1428571$$

$$\begin{array}{r} -30 \\ -28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ -14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ -56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ -35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ -49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{14285714}$$

हों, हम लंबा भाग किए बिना $2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7$ के दशमलव प्रसार को बता सकते हैं।

$\frac{2}{7}$ का दशमलव प्रसार को ज्ञात करने के लिए देखें $\frac{1}{7}$ के भाग में जब शेषफल 2 हो तथा उस स्थिति में जिस भागफल से अंकों की पुनरावर्ती हो, वही $\frac{2}{7}$ का मान होगा।

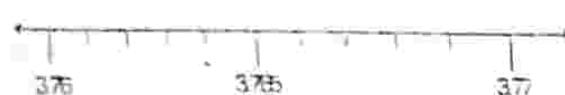
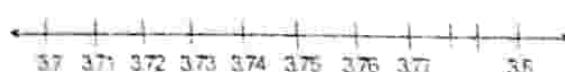
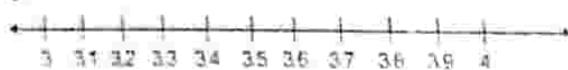
$$= \frac{2}{7} = 0.\overline{285714}; \frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$$

$$\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}; \frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$$

$$= \frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$$

प्रश्न 58. उत्तरोत्तर आवर्दन करके संख्या रेखा पर 3.765 को देखिए।

हल-



प्रश्न 59. $\frac{1}{17}$ के दशमलव प्रसार में अंकों के पुनरावृत्ति खण्ड में अंकों की अधिकतय मरुद्या क्या हो सकती है?

अपने उत्तर की जांच करने के लिए विभाजन-क्रिया कीजिए।

हल-

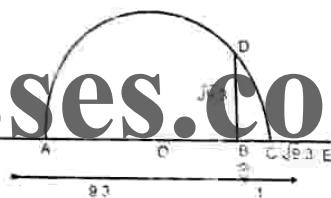
$$\begin{array}{r} 85 \\ - 150 \\ \hline - 136 \\ \hline 140 \\ - 136 \\ \hline 0040 \\ - 34 \\ \hline 60 \\ - 51 \\ \hline 90 \\ - 85 \\ \hline 50 \\ - 34 \\ \hline - 160 \\ \hline 153 \\ \hline 70 \\ - 68 \\ \hline 20 \\ - 17 \\ \hline 30 \\ - 17 \\ \hline 130 \\ - 119 \\ \hline 110 \\ - 102 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ - 68 \\ \hline 120 \\ - 119 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\frac{1}{17} = 0.\overline{00588235294117647}$$

प्रश्न 60. संख्या रेखा पर $\sqrt{9.3}$ को निरूपित कीजिए।

हल- सर्वप्रथम एक भीभी रेखा पर कोई बिन्दु A अंकित करो। A बिंदु में रेखा पर 0.3 एकक की दूरी पर कोई बिन्दु B अंकित करो। बिंदु B से 1 एकक दूरी पर C बिंदु अंकित करो। AC के मध्य बिन्दु को O मानो। O को केन्द्र मानकर तथा OC के समान त्रिज्या लेकर एक अधिवृत्त की रचना करो। AC पर एक लंब खोचो जो B से होकर जाती है तथा अधिवृत्त को D पर काटती है। तब $BD = \sqrt{9.3}$ है। अब पुनः BC को संख्या रेखा B को शून्य और C को 1 मानकर B को केन्द्र और BD के समान त्रिज्या लेकर एक चाप खोचो जो संख्या रेखा को E पर काटती है। अतः E संख्या रेखा पर $\sqrt{9.3}$ को निरूपित करती है।



प्रश्न 61. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए-

- (1) $(64)^{\frac{1}{2}}$ (2) $32^{\frac{1}{5}}$ (3) $(125)^{\frac{1}{3}}$ (4) $(16)^{\frac{3}{4}}$

हल- (1) $64^{\frac{1}{2}}$

$$= (8 \times 8)^{1/2} = (8^2)^{1/2} = 8^{\frac{2}{2}} = 8^1 = 8$$

(2) $32^{\frac{1}{5}}$

$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2)^{2/5} = (2^5)^{2/5}$$

$$= 2^{\frac{5}{5}} = 2^2 = 2 \times 2 = 4$$

(3) $125^{\frac{1}{3}} = (5 \times 5 \times 5)^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^1 = 5$

(4) $16^{\frac{3}{4}}$

$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2)^{\frac{3}{4}}$$

$$= (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{4 \times 3}{4}} = 2^3$$

$$= 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

□

2

अध्याय

बहुपद

स्मरणीय बिंदु

- एक चर वाला बहुपद $P(x)$ निम्न रूप का x में एक वीजीय व्यंजक है।

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
 जहाँ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ अचर हैं और $a_n \neq 0$ है।
 अनुमान: x_0, x, x^2, \dots, x^n के गुणांक हैं।
 n को बहुपद की घात कहा जाता है प्रत्येक $a^n x^n, a^{n-1} x^{n-1}, \dots, a_0$ जहाँ $a_n \neq 0$ को बहुपद $P(x)$ का पद कहा जाता है।
- एक पद वाले बहुपद को एकपदी कहा जाता है।
- दो पदों वाले बहुपद को द्विपद कहा जाता है।
- तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपद कहा जाता है।
- एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहा जाता है।
- दो घात वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद कहा जाता है।
- तीन घात वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद कहा जाता है।
- ज्ञास्त्रविक संख्या 'a' बहुपद $P(x)$ का शून्यक होती है यदि $P(a) = 0$ हो।
- एक घर में प्रत्येक रैखिक बहुपद $P(a)$ का एक अद्वितीय शून्यक होता है।
- शेषफल प्रमेय यदि $P(x)$ एक से अधिक या एक के बराबर घात वाला एक बहुपद हो और $P(x)$ को रैखिक बहुपद $x - a$ से भाग दिया गया हो, तो शेषफल $P(a)$ होता है।
- यदि $P(a) = 0$ हो, तो $(x - a)$ बहुपद $P(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है और यदि $x - a$, $P(x)$ का एक गुणनखण्ड हो तो $P(a) = 0$ होता है।
- $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yx + 2xy + 2zx$
- $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$
- $(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$
- $(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz + zx)$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

- प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-
- (1) निम्नलिखित में बहुपद है-

- (a) $\sqrt{3x} + 5$ (b) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
 (c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{x^2}$ (d) $x^2 + x + 2$

(2) निम्नलिखित में बहुपद नहीं है-

- (a) 5 (b) $y + \frac{2}{y}$
 (c) 0 (d) $\sqrt{2}x + 3$

(3) शून्य बहुपद की घात है-

- (a) 1 (b) कोई भी पूर्ण संख्या
 (c) परिभासित नहीं (d) 0

(4) बहुपद $x^2 + 3x^4 + x - 4x^3 + 7$ की घात है-

- (a) 2 (b) 2
 (c) 3 (d) 0

(5) बहुपद $x^2 - x - 6$ के शून्य है-

- (a) (3, -2) (b) (3, -2)
 (c) (3, 2) (d) (-3, -2)

(6) बहुपद $5x^4 \cdot 3x^2 + 4x^3 + 7x + 8$ में x^2 का गुणांक है-

- (a) 5 (b) 4
 (c) 3 (d) -3

(7) निम्नलिखित में कौन सा बहुपद रैखिक बहुपद है-

- (a) $x^2 + 2x + 5$ (b) $2x + 3$
 (c) $x^2 - 2$ (d) 8

(8) निम्नलिखित में कौन-सा बहुपद द्विघाती है-

- (a) $x^2 + 2x + 5$ (b) $2x + 3$
 (c) $x^2 - 3$ (d) 5

(9) यदि $x + 1$ बहुपद $x^2 - k$ का एक गुणनखण्ड है तो k का मान है-

- (a) -1 (b) 1
 (c) 0 (d) 2

(10) बहुपद $3x - 2$ का शून्यक है-

- (a) $\frac{3}{2}$ (b) $-\frac{3}{2}$
 (c) $\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{2}{3}$

(11) निम्नलिखित में से एक बहुपद है-

- (a) $3\sqrt{x} + x\sqrt{2}$ (b) $x + \frac{2}{x}$
 (c) $\frac{x-1}{x+1}$ (d) $x^2 + 3x$

(12) बहुपद $2 + x^2 + 2x$ में x^2 का गुणांक है-

- (a) 1 (b) 2
 (c) 0 (d) 3

(13) जब $x = -1$ है, तो बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ का मान है-

- (a) -1 (b) -6
 (c) 2 (d) -2

(14) बहुपद $5x^3 + 4x^2 + 7x$ की घात है-

- (a) 3 (b) 2
 (c) 7 (d) 5

(15) एक घात वाले बहुपद को कहते हैं-

- (a) द्विघात (b) त्रिघात
 (c) चतुर्घात (d) रॅम्पिक

(16) बहुपद $P(x) = 2x + 5$ का शून्यक है-

- (a) -2/5 (b) -5/2
 (c) 2/5 (d) 5/2

(17) निम्न में से रॅम्पिक बहुपद है-

- (a) $2x + 5$ (b) $4x^2 + 5x$
 (c) $2x^3 + 3x^2$ (d) $x^{3/2} + 5$

(18) यदि $a + b + c = 0$ है, तो $a^2 + b^2 + c^2$ वरावर है-

- (a) 0 (b) abc
 (c) 3abc (d) 2abc

(19) बहुपद $y^2 - 5y + 6$ का एक गुणनखंड $(y - 2)$ है
 तो दूसरा गुणनखंड होगा-

- (a) $(y - 2)$ (b) $(y - 7)$
 (c) $(y - 3)$ (d) $(y + 3)$

(20) $(x + 1)$, निम्नलिखित बहुपद का एक गुणनखंड है-

- (a) $x^3 + x^2 - x + 1$ (b) $x^4 + x^3 + x^2 + 1$
 (c) $x^5 + x^2 - x - 1$ (d) $3x^6 + 3x^3 + 3x^2 + 1$

(21) निम्न में 20 घात वाला बहुपद है-

- (a) $20x + 1$ (b) $\frac{x}{20} + 1$
 (c) $x^{20} + 1$ (d) $x^2 + 20$

(22) बहुपद $(2x + 1)(2x + 3)$ की घात है-

- (a) 1 (b) 2
 (c) 3 (d) 6

उत्तर- (1) (d) (2) (b) (3) (c) (4) (b) (5) (a) (6) (d)

(7) (b) (8) (a) (9) (b) (10) (c) (11) (d) (12) (a) (13)

(b) (14) (a) (15) (d) (16) (b) (17) (a) (18) (c) (19)

(c) (20) (b) (21) (c) (22) (b)

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(1) वास्तविक संख्या 'a' बहुपद $p(x)$ का शून्यक होता है यदि $p(a) = \dots$

(2) तीन घात वाले बहुपद को बहुपद कहा जाता है।

(3) दो घात वाले बहुपद को कहा जाता है।

(4) भाज्य = भाजक \times भागफल +

(5) बहुपद में चर की घात सदैव होती है।

(6) $-5x^4 + 3x$ में x^4 का गुणांक है।

(7) बहुपद $3x + 2$ का शून्यक है।

(8) $x^2 - y^2 = \dots$

(9) बहुपद में सबसे बड़े घात वाले घातांक बहुपद की कहते हैं।

(10) बहुपद जिसमें तीन पद हो बहुपद कहलाता है।

(11) बहुपद जिसमें एक ही पद हो बहुपद कहलाता है।

(12) जब $t = 0$ हो तो बहुपद $P(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$ का

मान है।

(13) 99³ का मान है।
 (14) वह बहुपद जिसके सभी गुणांक शून्य हो बहुपद कहलाता है।

(15) 95×96 का मान है।

उत्तर- (1) शून्य (2) त्रिघाती (3) पूर्ण संख्या (4) द्विघाती (5) शेषफल (6) पूर्ण संख्या (7) -5 (8) -2/3 (9) $(x+y)(x-5)$ (10) घात (11) त्रिपदी (12) एकपदी (13) 2 (14) 970299 (15) शून्य बहुपद।

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

(1) प्रत्येक रॅम्पिक बहुपद का एक अद्वितीय शून्यक होता है।

(2) दो घात वाले बहुपद को रॅम्पिक बहुपद कहते हैं।

(3) प्रत्येक वास्तविक संख्या बहुपद का एक शून्यक होती है।

(4) तीन घात वाले बहुपद की द्विघाती बहुपद कहते हैं।

(5) बहुपद $7 + 3x$, बहुपद $3x^2 + 7x$ का एक गुणनखंड है।

(6) प्रत्येक बहुपद एक द्विपद होता है।

(7) एक द्विपद की घात 4 होती है।

(8) रॅम्पिक बहुपद की घात 1 होती है।

(9) एक बहुपद का शून्यक सदैव 0 होता है।

(10) बहुपद x^{100} एक पदी बहुपद है।

- (11) $3x^2 + 5$ एक रैखिक बहुपद है।
 (12) अशून्य अचर पद की घात परिभासित नहीं है।
 (13) बहुपद $7x^3$ एक त्रिघात बहुपद है।
 (14) बहुपद $x^2 + x - 6$ एक त्रिपटी बहुपद है।
 (15) $(x - y)^3 = x^3 - y^3 + 3xy(x - y)$ होता है।
 (16) बहुपद के एक से अधिक शून्यक नहीं हो सकते हैं।
 (17) घात 3 वाले दो बहुपदों के योग की घात सदैव 3 होती है।
 (18) 0, बहुपद का एक शून्यक हो सकता है।
 (19) प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक और केवल एक शून्यक होता है।
उत्तर- (1) सत्य (2) असत्य (3) सत्य (4) असत्य (5) सत्य
 (6) असत्य (7) सत्य (8) सत्य (9) असत्य (10) सत्य (11) असत्य (12) असत्य (13) सत्य (14) सत्य (15) असत्य (16) असत्य (17) सत्य (18) सत्य (19) सत्य

प्रश्न 4. (अ) सही जोड़ी बनाइए-

कॉलम-(A)	कॉलम-(B)
(1) $x^3 - y^3$	(a) $\frac{-5}{2}$
(2) $x^3 + y^3$	(b) -1
(3) बहुपद $x^3 + 1$ का शून्यक	(c) $(x+y)(x^2 + xy + y^2)$
(4) बहुपद $x^4 + 2x + 10$ की घात	(d) $(x-y)(x^2 + y^2 + xy)$
(5) बहुपद $5x + 2$ का शून्यक	(e) 4

उत्तर- (1) (d) (2) (c) (3) (b) (4) (e) (5) (a)
 (ब) सही जोड़ी बनाइए-

कॉलम-(A)	कॉलम-(B)
(1) $(x + 4)(x + 10)$	(a) $(x + y)(x - y)$
(2) $(x + 8)(x - 10)$	(b) $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
(3) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$	(c) $x^2 + 14x + 40$
(4) $(x + y + z)^2$	(d) $x^2 - 2x - 80$
(5) $x^2 + y^2$	(e) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
(6) $(2x + 1)^3$ का प्रसारित रूप	(f) $(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx)$

उत्तर- (1) (c) (2) (d) (3) (b) (4) (e) (5) (a) (6) (f)

प्रश्न 5. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिये।

- (1) बहुपद $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल क्या प्राप्त होगा?
 (2) $(101)^3$ का मान क्या होगा?

- (3) रैखिक बहुपद की घात क्या होती है?
 (4) एक रैखिक बहुपद का उदाहरण लिखिए।
 (5) किसी बहुपद में अशून्य अचर पद की घात हमेशा क्या होती है?
उत्तर- (1) 0 (2) 1030301 (3) 1 (4) $7x + 8$ ($ax + b$)
 (5) 0

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. त्रिपद वाले बहुपद का उदाहरण लिखिए।

हल- $t(y) = y^4 + y + 5$

प्रश्न 2. घात 2 वाले बहुपद को क्या कहते हैं?

हल- घात 2 वाले बहुपद को द्विघाती या द्विघात बहुपद (quadratic polynomial) कहा जाता है।

प्रश्न 3. बहुपद $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ की घात लिखिए।

हल- बहुपद की घात = 3

प्रश्न 4. 100 घात के एक पदी बहुपद का उदाहरण लिखिए।

हल- $P(X) = x^{100}$

प्रश्न 5. यदि $a + b + c = 0$ तो $a^3 + b^3 + c^3$ का मान क्या होगा?

हल- हमें जानते हैं कि $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

प्रश्न 6. $x^3 + 1$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल- यहाँ $p(x) = x^2 + 1$ है और $x + 1 = 0$ का मूल $x = -1$ है अतः

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3 + 2 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

अतः हमें शेषफल 0 प्राप्त होता है।

प्रश्न 7. घात 35 के बहुपद का एक उदाहरण लिखिए।

हल- $p(x) = x^{35} + x^{34}$

प्रश्न 8. द्विघाती बहुपद क्या है?

हल- घात 2 वाले बहुपद को द्विघाती या द्विघात बहुपद (quadratic polynomial) कहा जाता है।

प्रश्न 9. द्विघाती बहुपद का उदाहरण लिखिए।

हल- द्विघाती बहुपद के कुछ उदाहरण $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ और $6 - y - y^2$ हैं।

प्रश्न 10. ऐसा बहुपद क्या कहलाता है जिसके सभी गुणांक 0 हों?

हल- शून्य बहुपद (zero polynomial) कहा जाता है।

प्रश्न 11. एक घात वाले बहुपद को क्या कहते हैं?

हल- रैखिक बहुपद (linear polynomial) कहा जाता है।

प्रश्न 12. रैखिक बहुपद के कितने शून्यक होते हैं?

हल- रैखिक बहुपद का एक और केवल एक शून्यक है।

प्रश्न 13. बहुपद $3x + 1$ का शून्यक क्या है?

हल- $3x + 1 = 0$

$$x = -\frac{1}{3}$$

प्रश्न 14. बहुपद $p(y) = y^2 - y - 1$ के लिए $p(0)$ और $p(1)$ ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} p(y) &= y^2 - y - 1 \\ p(0) &= (0)^2 - 0 - 1 \\ &= 0 - 0 - 1 \\ &= -1 \\ p(1) &= (1)^2 - 1 - 1 \\ p(2) &= (2)^2 - 2 - 1 \\ &= 4 - 2 + 1 = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

प्रश्न 15. बहुपद $p(x) = 3x - 2$ का शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल- माना कि

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ 3x - 2 &= 0 \\ 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

जहाँ $\frac{2}{3}$ बहुपद $3x - 2$ का एक शून्यक है।

प्रश्न 16. सीधे गुणा किये बिना 95×96 का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल- } \text{सर्वसमिका } (x + a)(x + b) &= x^2 + (a+b)x + ab \\ \text{का प्रयोग करने करने पर} \\ (90 + 5)(90 + 6) &= (90)^2 + (5 + 6)90 + 5 \times 6 \\ &= 8100 + 990 + 30 = 9120 \end{aligned}$$

प्रश्न 17. गुणनखंड ज्ञात कीजिए- $x^2 - \frac{y^2}{100}$

हल- यहाँ हम सर्वसमिका III का प्रयोग करेंगे।

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$\begin{aligned} &= x^2 - \left(\frac{y}{10}\right)^2 = \left(x + \frac{y}{10}\right)\left(x - \frac{y}{10}\right) \\ &= \left(x + \frac{y}{10}\right)\left(x - \frac{y}{10}\right) \end{aligned}$$

प्रश्न 18. निम्नलिखित में से प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिए।

(a) $\frac{\pi}{2}x^2 + x + 1$

(b) $2x - 5$

हल- (a) x^2 का गुणांक $\frac{\pi}{2}$ है।
(b) x^2 का गुणांक 0 है।

प्रश्न 19. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(x + 4)(x + 10)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल- } (x+4)(x+10) &= (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad (\text{सर्वसमिका IV}) \\ (x+4)(x+10) &= x^2 + (4+10)x + 4 \times 10 \\ &= x^2 + 14x + 40 \end{aligned}$$

प्रश्न 20. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(3x + 4)(3x - 5)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल- } (x + a)(x + b) &= x^2 + (a+b)x + ab \\ &= (3x)^2 + 4 + (-5)3x + 4 \times (-5) \\ &= 9x^2 + (4 - 5)3x + (-20) \\ &= 9x^2 - 3x - 20 \end{aligned}$$

प्रश्न 21. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(3 - 2x)(3 + 2x)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल- } (3 - 2x)(3 + 2x) &= (x + a)(x - b) = x^2 - b^2 \\ &= y^2 - (2x)^2 = 9 - 4x^2 \end{aligned}$$

प्रश्न 22. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(x + 8)(x - 10)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल- } (x + 8)(x - 10) &= (x + a)(x - b) = x^2 + (a-b)x + ab \\ &= (x + 8)(x - 10) \\ &= x^2 + 8 + 10x + 8 \times (-10) \\ &= x^2 + (8 - 10)x + (-80) \\ &= x^2 - 2x - 80 \end{aligned}$$

प्रश्न 23. सीधे गुणा किये बिना गुणनफल ज्ञात कीजिए।
 103×107

$$\begin{aligned} \text{हल- } 103 \times 107 &= (100 + 3)(100 + 7) \\ (x + a)(x + b) &= x^2 + (a+b)x + ab \\ (100 + 3)(100 + 7) &= (100)^2 + (3+7) \times 100 + 3 \times 7 \\ &= 10000 + 10 \times 100 + 21 \\ &= 10000 + 1000 + 21 \\ &= 11021 \end{aligned}$$

प्रश्न 24. सीधे गुणा किये बिना 105×106 का मान ज्ञात कीजिये।

$$\text{हल- } 105 \times 106 = (100 + 5)(100 + 6)$$

$$\begin{aligned}
 &= (100)^2 + (5+6) \times 100 + 5 \times 6 \\
 &\quad (\text{सर्वसमिका IV लागू करके}) \\
 &= 10000 + 1100 + 30 \\
 &= 11130
 \end{aligned}$$

प्रश्न 25. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिये। $(x + 3)(x + 3)$

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} &(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2 \\
 &= x^2 + 6x + 9
 \end{aligned}$$

प्रश्न 26. गुणनफल ज्ञात कीजिये $49a^2 + 70ab + 25b^2$

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} &49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 \\
 &= (7a + 5b)(7a + 5b)
 \end{aligned}$$

प्रश्न 27. बहुपद $p(x) = (x - 1)(x + 1)$ के लिए $p(0)$ व $p(1)$ ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} &p(x) = (x - 1)(x + 1) \\
 &p(0) = (0 - 1)(0 + 1) = -1 \times 1 = -1 \\
 &p(1) = (1 - 1) \times (1 + 1) 0 \times 2 = 0 \\
 &p(2) = (2 - 1)(2 + 1) = 1 \times 3 = 3
 \end{aligned}$$

प्रश्न 28. बहुपद $p(x) = cx + d$, ($c \neq 0$, c, d वास्तविक संख्याएँ हैं) का शून्यक ज्ञात कीजिये।

$$\begin{aligned}
 \text{हल- माना कि} &p(x) = 0 \\
 &cx + d = 0 \\
 &cx = -d \\
 &x = -\frac{d}{c}
 \end{aligned}$$

अतः $-d/c$, बहुपद $cx + d$ का एक शून्यक है।

प्रश्न 29. सत्यापित कीजिए कि 2 और 0 बहुपद $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं।

$$\begin{aligned}
 \text{हल- मान लीजिए} &p(x) = x^2 - 2x \\
 \text{तब} &p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \\
 \text{और} &p(0) = 0 - 0 = 0
 \end{aligned}$$

अतः 2 और 0 दोनों ही बहुपद $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं।

प्रश्न 30. सीधे गुणा किये बिना 104×96 का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल- } 104 \times 96 &= (x + y)(x - y) = x^2 - y^2 \quad (\text{सर्वसमिका III}) \\
 &= (100 + 4)(100 - 4) \\
 &= (100)^2 - (4)^2 \\
 &= 10000 - 16 \\
 &= 9984
 \end{aligned}$$

प्रश्न 31. सीधे गुणा किये बिना 97×103 का मान ज्ञात कीजिये।

$$\begin{aligned}
 \text{हल- } 97 \times 103 &= (100 - 3)(100 + 3) \\
 &= (100)^2 - (3)^2 \because x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \\
 &= 10000 - 9 = 9991
 \end{aligned}$$

प्रश्न 32. $p(x) = x^3 + 1$ को $x - 1$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिये।

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} &x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\
 &P(x) = (1)^3 + 1 \\
 &= (1)^3 + 1 = 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

प्रश्न 33. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(104)^3$ का मान ज्ञात कीजिये।

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} &(104)^3 = (100 + 4)^3 \\
 &(100)^3 + (4)^3 = (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4) \\
 &\quad \text{सर्वसमिका VI का प्रयोग करने पर} \\
 &= 1000000 + 64 + 124800 \\
 &= 1124864
 \end{aligned}$$

प्रश्न 34. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(999)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} &(999)^3 = (1000 - 1)^3 \\
 &= (1000)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)(1000 - 1) \\
 &\quad \text{सर्वसमिका VII का प्रयोग करने पर} \\
 &= 1000000000 - 1 - 2997000 \\
 &= 9997002999
 \end{aligned}$$

प्रश्न 35. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $9x^2 + 6xy + y^2$ का गुणनखंडन कीजिये।

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} &\text{यहाँ हम सर्वसमिका I का प्रयोग करेंगे} \\
 &x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \\
 &= 9x^2 + 6xy + y^2 \\
 &= (3x)^2 + 2 \times 3x \times y + y^2 \\
 &= (3x + y)(3x + y)
 \end{aligned}$$

प्रश्न 36. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $4y^2 - 4y + 1$ का गुणनखंड कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} &4y^2 - 4y + 1 \\
 &\text{यहाँ हम सर्वसमिका II का प्रयोग करेंगे}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \\
 &= 4y^2 - 4y + 1 \\
 &= (2y)^2 - 2 \times 2y \times 1 + (1)^2 \\
 &= (2y - 1)(2y - 1)
 \end{aligned}$$

प्रश्न 37. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(99)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} &(99)^3 = (100 - 1)^3 \\
 &\text{सर्वसमिका VII}
 \end{aligned}$$

20 / प्रश्न वीक-2023

$$\begin{aligned}(x-y)^3 &= x^3 - y^3 - 3xy(x-y) \\(100-1)^3 &= (100)^3 - (1)^3 - 3 \times 100 \times 1(100-1) \\&= 1000000 - 1 - 300(100-1) \\&= 1000000 - 1 - 30000 + 300 \\&= 970299\end{aligned}$$

प्रश्न 38. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(102)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल- } (x+y)^3 &= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) \\(100+2)^3 &= (100)^3 + (2)^3 + 3 \times 100 \times 2 \\&\quad (100+2) \\&= 1000000 + 8 + 600(100+2) \\&= 1000000 + 8 + 60000 + 1200 \\&= 1061208\end{aligned}$$

प्रश्न 39. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(x+2y+4z)^2$ का प्रसार कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल- } (x+2y+4z)^2 &= (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) \\&\quad (x+2y+4z)^2 \\&= x^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2 \times x \times 2y + 2 \times 2y \times 4z \\&\quad + 2xz \times x \\&= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8zx\end{aligned}$$

प्रश्न 40. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(3a+4b+5c)^2$ का प्रसार कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल- } (x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\(x+y+z)^2 \text{ के साथ तुलना करने पर} \\x = 3a, y = 4b \text{ और } z = 5c \\(3a+4b+5c)^2 &= (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) \\&\quad + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a) \\&= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 4abc + 30ac\end{aligned}$$

प्रश्न 41. $(4a-2b-3c)^2$ का प्रसार कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल- } (4a-2b-3c)^2 &= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b) \\&\quad (-3c) + 2(-3c)(4a) \\&= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ca\end{aligned}$$

प्रश्न 42. $(2x-y+z)^2$ का प्रसार कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल- } (2x-y+z)^2 &= (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\&= (2x-y+z)^2 \\&= (2x)^2 + (-y)^2 + z^2 + 2 \times 2x \times (-y) + 2 \times (-y) \times (z) \\&\quad + 2 \times z \times 2x \\&= 4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx\end{aligned}$$

प्रश्न 43. $(4a-2b-3c)^2$ का प्रसार कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल- } (4a-2b-3c)^2 &= [4a + (-2b) + (-3c)]^2 \\&= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b) \\&\quad (-3c) + 2(-3c)(4a) \\&= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac\end{aligned}$$

प्रश्न 44. $(-2x+3y+2z)^2$ का प्रसार कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल- } &= (-2x)^2 + (3y)^2 + 2(z)^2 + 2 \times (-2x) \times (3y) \\&\quad 2 \times (3y) \times (2z) + 2 \times (2z) \times (-2x) \\&\quad [\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca] \\&= 4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8zx\end{aligned}$$

प्रश्न 45. k का मान ज्ञात कीजिये जबकि $(x-1)$ बहुपद

$$p(x) = x^2 + x + k$$
 का एक गुणनखंड हो।

हल- चूँकि $(x-1)$, $p(x) = x^2 + x + k$ का एक गुणनखण्ड है

$$\text{इसलिए } x-1 = 0, x = 1$$

$$\text{तथा } p(1) = 0$$

$$p(1) = (1)^2 + 1 + k$$

$$p(1) = 1 + 1 + k$$

$$= 2 + k$$

$$\boxed{k=2}$$

प्रश्न 46. k का मान ज्ञात कीजिये जबकि $(x-1)$ बहुपद

$$p(x) = kx^2 - 3x + k$$
 का एक गुणनखंड हो।

हल- चूँकि $(x-1)$, $p(x) = kx^2 - 3x + k$ का एक गुणनखण्ड है

$$\text{तथा } x-1 = 0, x = 1$$

$$p(1) = 0$$

$$p(1) = k \times (1)^2 - 3(1) + k$$

$$= k - 3 + k$$

$$= k + k - 3$$

$$= 2k - 3$$

$$= 2k - 3 = 0$$

$$2k = 3$$

$$\boxed{k=3/2}$$

प्रश्न 47. गुणनखंड कीजिए- $12x^2 - 7x + 1$

$$\text{हल- } 12x^2 - 7x + 1$$

$$= 12x^2 - (3x + 4x) + 1$$

$$12 \times 1 = 12$$

$$= 12x^2 - 3x - 4x + 1$$

$$3 \times 4 = 12$$

$$= 3 \times (4x-1) - 1(4x-1)$$

$$3+4 = 7$$

$$= (3x-1)(4x-1)$$

प्रश्न 48. गुणनखंड कीजिए- $2x^2 + 7x + 3$

$$\text{हल- } = 2x^2 + 7x + 3$$

$$= 2x^2 + (1+6)x + 3$$

$$= 2x^2 + x + 6x + 3$$

$$= x(2x + 1) + 3(2x + 1)$$

$$= (x+3)(2x+1)$$

प्रश्न 49. गुणनखंड कीजिए- $6x^2 + 5x - 6$

$$\text{हल- } 6x^2 + 5x - 6$$

$$= 6x^2 + (9-4)x - 6$$

$$= 6x^2 + 9x - 4x - 6$$

$$= 3x(2x+3) - 2(2x+3)$$

$$= (2x+3)(3x-2)$$

प्रश्न 50. गुणनखंड कीजिए- $y^2 - 5y + 6$

हल- मान लीजिए $p(y) = y^2 - 5y + 6$ है। अब यदि $p(y) = (y-a)(y-b)$ हो, तो हम जानते हैं कि इसका अचर पद ab होगा। अतः $ab = 6$ है। इसलिए $p(y)$ के गुणनखण्ड प्राप्त करने के लिए हम 6 के गुणनखण्ड 1, 2 और 3 हैं।

$$\text{अब } p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$$

इसलिए $y=2$, $p(y)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$\text{साथ ही } p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$$

इसलिए $y=3$ भी $y^2 - 5y + 6$ का एक गुणनखण्ड है।

$$\text{अतः } y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3)$$

प्रश्न 51. $x^3 - ax^2 + 6x - a$ को $(x-a)$ से भाग देने पर

शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल-

$$\begin{array}{r} x^2 + 6 \\ \hline x-a) \overline{x^3 - ax^2 + 6x - a} \\ \quad -x^3 + ax^2 \\ \hline \quad 0 \quad 6x - a \\ \quad -6x + 6a \\ \hline \quad \quad + \\ \quad \quad 5a \end{array}$$

यहाँ शेषफल $5a$ है।

$x-a$ का शून्यक $x-a=0$, $x=a$ है।

अतः $p(x)$ में $x=a$ रखने पर,

$$p(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$$

$$p(a) = (a)^3 - a(a)^2 + 6(a) - a \\ = a^3 - a^3 + 6a - a = 5a$$

अतः $x-a$ से भाग देने पर $5a$ शेषफल प्राप्त होगा।

प्रश्न 52. $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ को $(x-1)$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल- यहाँ $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ है और $x-1$ का शून्यक 1 है।

$$p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1 = 2$$

अतः शेषफल प्रमेय के अनुसार $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ को $(x-1)$ से भाग देने पर शेषफल 2 प्राप्त होता है।

प्रश्न 53. $p(x) = x^3 + 1$ को $(x+1)$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल- यहाँ $p(x) = x^3 + 1$ है और $x+1 = 0$ का मूल है।

$$\begin{aligned} \text{अतः } p(-1) &= (-1)^2 + 1 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

अतः हमें शेषफल 0 प्राप्त होता है।

प्रश्न 54. यदि $(x-1)$, $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ का एक गुणनखंड है तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल- क्योंकि $x-1$, $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ का एक गुणनखण्ड है, इसलिए

$$p(1) = 0 \text{ होगा}$$

$$\text{अब } p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$$

$$\text{इसलिए } 4 + 3 - 4 + k = 0$$

$$\text{अतः } k = -3$$

प्रश्न 55. गुणनखंड कीजिए $6x^2 + 17x + 5$

हल- अतः $6x^2 + 17x + 5$

$$= 6x^2 + (2x+5)x + 5$$

$$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$$

$$= 2x(3x+1) + 5(3x+1)$$

$$= (3x+1)(2x+5)$$

प्रश्न 56. बहुपद $12x^2 - 7x + 1$ का गुणनखंड कीजिये।

हल- $12x^2 - 7x + 1$

$$= 12x^2 - (3x+4x) + 1$$

$$12 \times 1 = 12$$

$$= 12x^2 - 3x + 4x + 1$$

$$3 \times 4 = 12$$

$$= 3 \times (4x-1) - 1(4x-1)$$

$$3+4 = 7$$

$$= (3x-1)(4x-1)$$

प्रश्न 57. जाँच कीजिए कि $7 + 3x$, $3x^3 + 7x$ का गुणनखंड है अथवा नहीं।

हल- माना कि $p(x) = 3x^3 + 7x$

तथा $7 + 3x$

$$3x = -7$$

$$x = -7/3$$

$$p\left(-\frac{7}{3}\right) = 3\left(\frac{-7}{3}\right)^3 + 7\left(\frac{-7}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \times \frac{-343}{279} + \frac{(-49)}{3} \\
 &= \frac{-343}{9} + \frac{(-49)}{3} \\
 &= \frac{-343 + (3x - 49)}{9} \\
 &= \frac{-343 - 147}{9} \\
 &= \frac{-490}{9} \neq 0
 \end{aligned}$$

अतः $7 + 3x; 3x^2 + 7x$ का गुणनखंड नहीं है।

प्रश्न 58. $(5x - 3y)^3$ का प्रसारित कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल- } (5x - 3y)^3 &= (5x)^3 - (3y)^2 - 3(5x)(3y) (5x - 3y) \\
 &\because (x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \\
 &= 125x^3 - 27y^3 - 225x^2y - 135xy^2
 \end{aligned}$$

प्रश्न 59. निम्नलिखित बहुपदों के लिए $p(0)$ तथा $p(1)$ ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल- } 1. \quad p(0) &= 2(0)^2 - 3(0) - 4(0) - 5 = -5 \\
 p(1) &= 2(1)^2 - 3(1)^2 - 4(1) - 5 = 2 - 3 + 4 - 5 = -2 \\
 2. \quad p(0) &= 3(0)^2 - 5(0) - 7 = 7 \\
 p(1) &= 3(1)^2 - 5(1) - 7 = 5 \\
 3. \quad p(0) &= (0) - 1 = -1 \\
 p(1) &= (1)^2 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

प्रश्न 60. $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$

$$\begin{aligned}
 \text{हल- } p(0) &= 2 \times (0)^3 - 3(0) + 4(0) = -5 \\
 p(1) &= 2(1)^3 - 3(1)^2 + 4(1) - 5 = 2 - 3 + 4 - 5 = -2
 \end{aligned}$$

प्रश्न 61. $p(x) = 3x^2 - 5x + 7$

$$\begin{aligned}
 \text{हल- } p(0) &= 3(0)^2 - 5(0) + 7 = 7 \\
 p(1) &= 3(1)^2 - 5(1) + 7 = 5
 \end{aligned}$$

प्रश्न 62. $p(x) = x^3 - 1$

$$\begin{aligned}
 \text{हल- } p(0) &= (0)^3 - 1 = 1 \\
 p(1) &= (1)^3 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

प्रश्न 63. $x^3 - x^2 + x + 2$ को $x - 1$ से भाग देने पर क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

$$\begin{aligned}
 \text{हल- } \because x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\
 P(x) &= x^3 - x^2 + x + 2 \\
 &= (1)^3 - (1)^2 + (1) + 2 = 1 - 1 + 1 + 2 = 3
 \end{aligned}$$

प्रश्न 64. $p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ को $x - 1$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिये।

$$\text{हल- } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$P(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1 = 3 - 4 - 3 - 1 = -5$$

प्रश्न 65. निम्नलिखित मानों पर बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ का मान ज्ञात कीजिये।

- (a) $x = 0$ (b) $x = -1$ (c) $x = 2$

हल- माना कि $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad x = 0 \text{ मान रखने पर} \\
 p(0) &= 5(0) - 4(0)^2 + 3 \\
 &= 0 - 0 + 3 = 3
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad x = -1 \text{ मान रखने पर}$$

$$\begin{aligned}
 p(-1) &= 5(-1) - 4(-1)^2 + 3 \\
 &= 5x - 1 - 4 \times 1 + 3 \\
 &= -5 - 4 + 3 \\
 &= -9 + 3 = -6
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad x = 2 \text{ का मान रखने पर}$$

$$\begin{aligned}
 p(2) &= 5(2) - 4 \times (2)^2 + 3 \\
 &= 5 \times 2 - 4 \times 2 \times 2 + 3 \\
 &= 10 - 16 + 3 \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

प्रश्न 66. $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ का गुणनखंड ज्ञात कीजिये।

$$\begin{aligned}
 \text{हल- } x^3 - 23x^2 + 142x - 120 &= x^3 - x^2 - 22x^2 + \\
 &\quad 22x + 120x - 120 \\
 &= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1) \\
 &= (x - 1)(x^2 - 22x + 120) (x - 1) \\
 &= x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120 \\
 &= x(x - 12) - 10(x - 12) \\
 &\vdots (x - 12)(x - 10)
 \end{aligned}$$

$$\text{अतः } x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$$

प्रश्न 67. गुणनखंड ज्ञात कीजिये $x^3 - 2x^2 - x + 2$

$$\begin{aligned}
 \text{हल- } \text{माना कि } p(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\
 p(1) &= 0, \text{ अतः } (x - 1) = 0; x = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p(1) &= (1)^3 - 2(1)^2 - 1 + 2 \\
 &= 1 - 2 - 1 + 2 = 0
 \end{aligned}$$

अतः $(x - 1); p(x)$ का एक गुणनखंड है।

$$\begin{aligned}
 \text{अब } x^3 - 2x^2 - x + 2 &= x^3 - (x^2 + x^2) - (x + 2x) - 2 \\
 &= x^3 - x^2 - x^2 - x - 2x - 2 \\
 &= x^2(x - 1) - x(x - 1) - 2(x - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x - 1) (x^2 - x - x) \\
 &= (x - 1) (x^2 - (x - 1)x - 2) \\
 &= (x - 1) (x^2 - 2x + x - 2) \\
 &= (x - 1) \times (x - 2) + 1(x - 2) \\
 &= (x - 2) (x - 1) (x + 1)
 \end{aligned}$$

प्रश्न 68. $(3a + 4b)^3$ को प्रसारित रूप में लिखिए।

हल- $(x - y)^3$ के साथ दिए गए व्यंजक की तुलना करने पर हम, यह पाते हैं कि

$$x = 3a \text{ और } y = 4b$$

अतः सर्वसमिका VI का प्रयोग करने पर, हमें यह प्राप्त होता है।

$$\begin{aligned}
 (3a + 4b)^3 &= (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b) \\
 &= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2
 \end{aligned}$$

प्रश्न 69. $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ का गुणनखंड कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} \quad \text{यहाँ } 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz &= (2x)^2 \\
 &+ (-y^2) + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(2x)(z) \\
 &\quad \text{सर्वसमिका V लागू करने पर} \\
 &= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)(2x - y + z)
 \end{aligned}$$

प्रश्न 70. $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$ का गुणनखंड कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} \quad \text{यहाँ } 8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz &= (2x)^3 + (y)^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z) \\
 &= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) \\
 &\quad - (2x)(3z)] \\
 &= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)
 \end{aligned}$$

प्रश्न 71. $27y^3 + 125z^3$ का गुणनखंड कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} \quad 27y^3 + 125z^3 &= (3y)^3 + (5z)^3 \\
 &= x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2) \\
 &= (3y)^3 + (5z)^3 \\
 &= (3y + 5z)[(3y)^2 - 3y \times 5z + (5z)^2] \\
 &= (3y + 5z)(9y^2 - 15yz + 25z^2)
 \end{aligned}$$

प्रश्न 72. यदि $x + y + z = 0$ हो तो दिखाइए कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ है।

$$\text{हल- } x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

सर्वसमिका से

$$\begin{aligned}
 x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3 - xy - yz - zx) \\
 &= (x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3 - xy - yz - zx)
 \end{aligned}$$

दिया है $x + y + z = 0$

$$\begin{aligned}
 &= (0)(x^3 + y^3 + z^3 - xy - yz - zx) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

अतः $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

प्रश्न 73. $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ का गुणनखंड कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} \quad 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2 &= (2a)^3 + (b)^3 + 3 \times 2ab(2a + b) \\
 &\quad \text{यहाँ सर्वसमिका VI के अनुसार}
 \end{aligned}$$

$$(2a + b)^3$$

$$= (2a + b)(2a + b)(2a + b)$$

प्रश्न 74. $64m^3 - 343n^3$ का गुणनखंड कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} \quad 64m^3 - 343n^3 &= (4m)^3 - (7n)^3 \\
 &= x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \\
 &= (4m - 7n)[(4m)^2 + 4m \times 7n + (7n)^2] \\
 &= (4m - 7n)[16m^2 + 49n^2 + 28mn]
 \end{aligned}$$

प्रश्न 75. गुणनखंड कीजिए $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} \quad 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz &= (2x)^2 + (3y)^2 + (-4z)^2 + 2 \times 2x \times 3y + 2 \times 9y \times (-4z) \\
 &\quad - 2 \times 2x \times (-4z) \\
 &= [(2x + 3y + (-4z))^2]
 \end{aligned}$$

$$= (2x + 3y - 4z)(2x + 3y - 4z)$$

प्रश्न 76. सत्यापित कीजिए-

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

हल- सर्वसमिका VI के अनुसार

$$\begin{aligned}
 (x + y)^3 &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \\
 &= x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\
 &= (x + y)(x + y)^2 - 3xy
 \end{aligned}$$

सर्वसमिका I

$$\begin{aligned}
 (x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
 &= (x + y)[(x^2 + 2xy + y^2 - 3xy)] \\
 &= (x + y)(x^2 + y^2 + 2xy - 3xy) \\
 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2)
 \end{aligned}$$

प्रश्न 77. सत्यापित कीजिए

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

हल- सर्वसमिका VII के अनुसार

$$\begin{aligned}(x-y)^3 &= x^3 - y^3 - 3xy(x-y) \\&= x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y) \\&= (x-y)(x-y)^2 + 3xy\end{aligned}$$

सर्वसमिका II के अनुसार

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \\&= (x-y)[(x^2 - 2xy + y^2) + 3xy] \\&= (x-y)(x^2 - y^2 - 2xy + 3xy) \\&= (x-y)(x^2 + xy + y^2)\end{aligned}$$

प्रश्न 78. गुणनखंड कीजिए $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

$$\begin{aligned}\text{हल- } 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2 &= (2a)^3 + (b)^3 + 3 \times 2ab(2a + b)\end{aligned}$$

सर्वसमिका VI के अनुसार

$$\begin{aligned}&= (2a + b)^3 \\&= (2a + b)(2a + b)(2a + b)\end{aligned}$$

प्रश्न 79. वास्तव में घनों का परिकलन किये जिनके $(-12)^3 + 7^3 + 5^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल- } (-12)^3 + 7^3 + 5^3$$

सर्वसमिका VIII के अनुसार

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 \\&= 3 \times (-12)(7)(5) \\&= 3 \times 1 - 2 \times 7 \times 5\end{aligned}$$

www.jcdclasses.com

3

अध्याय

स्परणीय बिंदु

- एक तल में एक बन्दू या एक बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए लाइनर रेखाओं की आवश्यकता होती है।
- क्षेत्रिज रेखा को X-अक्ष और ऊर्ध्वांधर रेखा का Y-अक्ष कहते हैं।
- निर्देशांक अक्ष तल को चार भागों में छोट टुकड़े हैं, जिन्हें चतुर्थांश कहते हैं।
- अक्षों का प्रतिच्छेद बिन्दु मूल बिन्दु कहलाता है।
- X-अक्ष के निर्देशांक को भुज और Y-अक्ष के निर्देशांक को कोटि कहा जाता है।
- मूल बिन्दु के निर्देशांक (0,0) होते हैं।

प्रश्न 80. नीचे दिए गए आयत में उसका क्षेत्रफल दिया गया है, लम्बाई व चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिये।

क्षेत्रफल- $25a^2 - 35a + 12$

$$\begin{aligned}\text{हल- } \text{क्षेत्रफल } 25a^2 - 35a + 12 &= 5a(5a - 4) - 3(5a - 4) \\&= (5a - 4)(5a - 3)\end{aligned}$$

इसलिए लम्बाई = $(5a - 3)$ और चौड़ाई $(5a - 4)$

[चयोकि $(5a - 3) > (5a - 4)$]

प्रश्न 81. घनाभ जिसका आयतन नीचे दिया गया विमाओं के लिए संभव व्यंजक क्या है? आयतन- $3x^2 - 12$

$$\begin{aligned}\text{हल- } 3x^2 - 12x &= 3x(x - 4) \\&\text{संभव व्यंजक होगा } 3x \text{ तथा } (x - 4)\end{aligned}$$

प्रश्न 82. गुणनखंड प्रसेय लागू करके बताइये कि $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है अथवा नहीं, यदि $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ तथा $g(x) = x + 1$

$$\text{हल- } p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$$

माना कि $g(x) = 0$

$$x + 1 = 0, x = -1$$

माना कि $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

$$\begin{aligned}(x+1) &= 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1 \\&= -2 - 1 + 1 + 2 - 1 \\&= 2 + 1 + 2 - 1\end{aligned}$$

$$= 0$$

अतः $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

निर्देशांक ज्यामिति

- एक बिन्दु के निर्देशांक पहले चतुर्थांश में (+,+) दूसरे में (-,+), तीसरे में (-,-) चौथे चतुर्थांश में (+,-) के रूप में होते हैं।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

(1) मूल बिन्दु के निर्देशांक होते हैं-

(a) (1,1) (b) (1,0)

(c) (0,0) (d) (0,1)

(2) बिन्दु (-2,-3) किस चतुर्थांश में स्थित होगा-

(a) प्रथम चतुर्थांश (b) द्वितीय चतुर्थांश

(c) तृतीय चतुर्थांश (d) चतुर्थ चतुर्थांश

- (3) निम्नलिखित में से कौन-सा बिन्दु X-अक्ष पर स्थित होगा-**
- (a) (0,3) (b) (0,-3)
(c) (2,1) (d) (5,0)
- (4) निम्नलिखित में से कौन-सा बिन्दु Y-अक्ष पर स्थित होगा-**
- (a) (0,2) (b) (1,2)
(c) (2,0) (d) (8,0)
- (5) बिन्दु (2,1) किस चतुर्थांश में स्थित होगा-**
- (a) प्रथम चतुर्थांश (b) द्वितीय चतुर्थांश
(c) तृतीय चतुर्थांश (d) चतुर्थ चतुर्थांश
- (6) बिन्दु (0,4) स्थित होगा-**
- (a) x-अक्ष (b) y-अक्ष पर
(c) मूल बिन्दु पर (d) उपरोक्त में से कोई नहीं
- (7) बिन्दु (-3,2) किस चतुर्थांश में स्थित होगा-**
- (a) प्रथम चतुर्थांश (b) द्वितीय चतुर्थांश
(c) तृतीय चतुर्थांश (d) चतुर्थ चतुर्थांश
- (8) बिन्दु (-3,0) स्थित होगा-**
- (a) x-अक्ष पर (b) y-अक्ष पर
(c) मूल बिन्दु पर (d) उपरोक्त में से कोई नहीं
- (9) निम्न में से कौन-सा बिन्दु y-अक्ष पर स्थित होगा**
- (a) (2,3) (b) (-1,-1)
(c) (0,5) (d) (2,1)
- (10) निम्न में से कौन सा बिन्दु अक्ष पर स्थित होगा-**
- (a) (4,1) (b) (2,0)
(c) (2,2) (d) (0,0)
- (11) बिन्दु (4,1) की x-अक्ष से दूरी होगी-**
- (a) 1 (b) 4
(c) 5 (d) 3
- (12) बिन्दु (3,2) की y-से दूरी होगी-**
- (a) 3 (b) 5
(c) 5 (d) 2
- (13) बिन्दु (2,2) किस चतुर्थांश में है-**
- (a) प्रथम चतुर्थांश (b) द्वितीय चतुर्थांश
(c) तृतीय चतुर्थांश (d) चतुर्थ चतुर्थांश
- (14) बिन्दु (3,4) में भुज का मान है-**
- (a) 3 (b) 4
(c) 7 (d) 0
- उत्तर-** (1) (c) (2) (c) (3) (d) (4) (a) (5) (d) (6) (b) (7)
(b) (8) (a) (9) (c) (10) (b) (11) (a) (12) (a) (13) (a)
(14) (b)
- प्रश्न 2. सत्य/असत्य लिखिए-**
- (1) मूल बिन्दु में भुज एवं कोटि दोनों शून्य होते हैं।
(2) y अक्ष में भुज शून्य नहीं होता है।
(3) x अक्ष में कोटि हमेशा शून्य होती है।
(4) बिन्दु (2,3) प्रथम चतुर्थांश में स्थित होता है।
(5) बिन्दु (-1,2) y-अक्ष पर स्थित होगा।
(6) x-अक्ष पर स्थित बिन्दु की कोटि हमेशा शून्य होती है।
(7) y-अक्ष पर स्थित बिन्दु की भुज हमेशा शून्य होती है।
(8) बिन्दु (-1,2) प्रथम चतुर्थांश में स्थित होगा।
(9) बिन्दु (4,0) y-अक्ष पर स्थित होगा।
(10) बिन्दु (0,3) x-अक्ष पर स्थित होगा।
(11) बिन्दु (-2,-1) तृतीय चतुर्थांश में स्थित होगा।
(12) बिन्दु (4,2) x-अक्ष से 2 इकाई की दूरी पर स्थित होगा।
(13) बिन्दु (3,3) x-अक्ष पर स्थित होगा।
(14) बिन्दु (-2,-5) y-अक्ष पर स्थित होगा।
- उत्तर-** (1) सत्य (2) असत्य (3) सत्य (4) सत्य (5) असत्य
(6) सत्य (7) सत्य (8) असत्य (9) असत्य (10) असत्य (11)
सत्य (12) सत्य (13) असत्य (14) असत्य।
- प्रश्न 3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए**
- (1) निर्देशांक तल में x-अक्ष और y-अक्ष के प्रतिच्छेद बिन्दु को कहते हैं।
(2) बिन्दु (x,y) में x को भुज तथा y को कहते हैं।
(3) बिन्दु (-3,4) की x-अक्ष से दूरी है।
(4) अक्षों के प्रतिच्छेद बिन्दु को कहते हैं।
(5) निर्देशांक अक्ष तल को भागों में बांट देते हैं।
(6) मूल बिन्दु के निर्देशांक होते हैं।
(7) x-अक्ष के निर्देशांक को कहते हैं।
(8) y-अक्ष के निर्देशांक को कहते हैं।
(9) निर्देशांक (5,2) में भुज का मान है।
(10) निर्देशांक (-3,-2) में कोटि का मान है।
(11) बिन्दु (4,0) अक्ष पर स्थित होगा।
- उत्तर-** (1) मूल बिन्दु (2) कोटि (3) 4 इकाई (4) मूल बिन्दु
(5) चार (6) (0,0) (7) भुज (8) कोटि (9) 5 (10)
-2 (11) x अक्ष।

प्रश्न 4. सही जोड़ी बनाइए-

(क) कॉलम-(A)

- (1) x -के निर्देशांक हैं।
- (2) विन्दु (2,1) स्थित है।
- (3) मूल बिन्दु के निर्देशांक
- (4) विन्दु (3,5) की कोटि है।
- (5) विन्दु (-2,4) स्थित है।

उत्तर- (1) (d) (2) (c) (3) (b) (4) (e) (5) (a)

कॉलम-(B)

- (a) द्वितीय चतुर्थांश में
- (b) (0,0)
- (c) प्रथम चतुर्थांश में
- (d) (भूज,0)
- (e) 5

उत्तर- (1) (d) (2) (c) (3) (b) (4) (e) (5) (a)

(ख) कॉलम-(A)

- (1) विन्दु (0,1) स्थित है।
- (2) विन्दु (2,3) पर भूज का मान है।
- (3) विन्दु (4,-1) स्थित है।
- (4) विन्दु (0,0) स्थित है।
- (5) y -अक्ष के निर्देशांक हैं।

उत्तर- (1) (b) (2) (e) (3) (a) (4) (c) (5) (d)

कॉलम-(B)

- (a) चतुर्थ चतुर्थांश में
- (b) y -अक्ष पर
- (c) मूल बिन्दु पर
- (d) (0,कोटि)
- (e) 2

उत्तर- (1) (b) (2) (e) (3) (a) (4) (c) (5) (d)

प्रश्न 5. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिये।

(1) विन्दु (0,4) कहां पर स्थित होगा?

(2) विन्दु (-5,6) किस चतुर्थांश में स्थित होगा?

(3) निर्देशांक अक्ष बल को कितने भागों में बांट देते हैं?

(4) x -अक्ष पर विन्दु विन्दु के निर्देशांक का किस रूप में लिखते हैं?

(5) भूज किसे कहते हैं?

(6) कोटि किसे कहते हैं।

(7) कार्तीय तल में किसी विन्दु की स्थिति निर्धारित करने वाली क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाओं के नाम क्या हैं?

(8) विन्दु (3,-2) किस चतुर्थांश में स्थित होगा?

(9) विन्दु (4,5) x -अक्ष से कितने डिग्री की दूरी पर है।

(10) विन्दु (2,0) कहां स्थित होगा।

(11) विन्दु (0,-3) कहां स्थित होगा।

उत्तर- (1) y -अक्ष पर (2) द्वितीय चतुर्थांश (3) 4 (4) (a,0)

(5) x -अक्ष के निर्देशांक (6) y -अक्ष के निर्देशांक (7) x -अक्ष,

y -अक्ष (8) चतुर्थ चतुर्थांश में (9) 5 (10) x -अक्ष पर (11)

y -अक्ष पर।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 5. कार्तीय तल में किसी विन्दु की स्थिति निर्धारित करने वाली क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाओं के क्या नाम हैं तथा इनके प्रतिच्छेद विन्दु का नाम क्या है?

हल- क्षैतिज रेखा $X'X$ को X कहा जाता है और ऊर्ध्वाधर रेखा YY' को Y अक्ष कहा जाता है। यह विन्दु, जहाँ $X'X$ और

YY' एक-दूसरे को काटती है, उसे मूलबिंदु (origin) कहा जाता है और इसे O से प्रकट किया जाता है।

प्रश्न 6. कार्तीय तल को x -अक्ष और y -अक्ष द्वारा कितने भागों में विभाजित किया जाता है?

हल- ये दोनों अक्ष तल को चार भागों में विभाजित करती है। X -अक्ष और X -अक्ष से बने तल के प्रत्येक भाग का नाम (a) प्रथम चतुर्थांश (b) द्वितीय चतुर्थांश (c) तृतीय चतुर्थांश (d) चतुर्थ चतुर्थांश।

प्रश्न 7. चतुर्थांश किसे कहते हैं?

हल- अक्ष तल को चार भागों में विभाजित करती है। इन चारों भाग को चतुर्थांश कहा जाता है।

प्रश्न 8. विन्दु (4,5) किस चतुर्थांश में स्थित होगा?

हल- (4,5) चतुर्थांश I में स्थित है।

प्रश्न 9. विन्दु (1,2) और (3,2) किस चतुर्थांश में स्थित हैं?

हल- (3,2) चतुर्थांश I में स्थित है।

प्रश्न 10. विन्दु (0,2) और (-1,0) किस अक्ष पर स्थित हैं?

हल- विन्दु (0,2) धनात्मक y -अक्ष पर स्थित है।

विन्दु (-1,0) धनात्मक x -अक्ष पर स्थित है।

प्रश्न 11. विन्दु (3,8) में भूज और कोटि के मान लिखिए।

हल- विन्दु (3,8)

x -निर्देशांक \rightarrow भूज = 3

y -निर्देशांक \rightarrow कोटि = 8

प्रश्न 12. अक्षों के प्रतिच्छेद विन्दु को क्या कहते हैं?

हल- उसे मूल विन्दु कहा जाता है।

प्रश्न 13. विन्दु (2,3), (-1,-1) और (3,-1) किस-किस चतुर्थांश में स्थित हैं?

हल- (1) विन्दु (2,3) चतुर्थांश I में स्थित है।

(2) विन्दु (-1,-1) चतुर्थांश III में स्थित है।

(3) विन्दु (3,-1) चतुर्थांश IV में स्थित है।

प्रश्न 14. विन्दु (-2,7) में भूज और कोटि के मान क्या हैं?

हल- विन्दु (-2,7)

x -निर्देशांक \rightarrow भूज = -2

y -निर्देशांक \rightarrow कोटि = 7

प्रश्न 15. विन्दु (-2,-1) और (-4,3) किस-किस चतुर्थांश में स्थित हैं?

हल- विन्दु (-2,-1) चतुर्थांश III में स्थित है।

विन्दु (-4,3) चतुर्थांश II में स्थित है।

प्रश्न 16. विन्दु (0,-3) किस अक्ष पर स्थित है?

हल- विन्दु (0,3) धनात्मक y -अक्ष पर स्थित है।

www.jcdclasses.com

प्रश्न 17. बिन्दु (-9, 0) किस अक्ष पर स्थित है?

हल- बिन्दु (-9, 0) जहांतमक x-अक्ष पर स्थित है।

प्रश्न 18. बिन्दु (4, 6) की x-अक्ष और y-अक्ष से दूरी क्या है?

हल- x-अक्ष से दूरी = 6 इकाई

y-अक्ष से दूरी = 4 इकाई है।

प्रश्न 19. बिन्दु (3, 7) की अक्षों से दूरी क्या है?

हल- x-अक्ष से दूरी 7 इकाई

y-अक्ष से दूरी 3 इकाई है।

प्रश्न 20. बिन्दु (5, 7) में भुज व कोटि लिखिए।

हल- भुज = 5

कोटि = 7 है।

प्रश्न 21. बिन्दु (7, 9) में अक्षों के मान क्या है?

हल- x-अक्ष से दूरी = 9 इकाई

y-अक्ष से दूरी = 7 इकाई है।

प्रश्न 22. निर्देशांक अक्ष किसे कहते हैं?

हल- x अक्ष व y अक्ष को निर्देशांक अक्ष कहते हैं।

प्रश्न 23. बिन्दु (3, 2) (4, 1) (5, -3) स्थिति किन चतुर्थांशों में है लिखिए।

हल- (1) (3, 2) प्रथम चतुर्थांश

(2) (4, 1) प्रथम चतुर्थांश

(3) (5, -3) चतुर्थ चतुर्थांश

प्रश्न 24. बिन्दु (-2, 2) और (3, -4) में भुज और कोटि के मान लिखिए।

हल- बिंदु (-2, 2) के लिए

भुज = -2

कोटि = 2

बिंदु (3, -4)

भुज = 3

कोटि = -4

प्रश्न 25. बिन्दु (0, -3) (0, 6) और (7, 0) किस-किस अक्ष पर स्थित है लिखिए।

हल- (1) बिंदु (0, -3) \Rightarrow y-अक्ष

(2) बिंदु (0, 6) \Rightarrow y-अक्ष

(3) (7, 0) \Rightarrow x-अक्ष

प्रश्न 26. बिन्दु (7, 12) की x-अक्ष और y-अक्ष से दूरी क्या-क्या है?

हल- x-अक्ष से दूरी = 12 इकाई

y-अक्ष से दूरी = 7 इकाई

प्रश्न 27. बिन्दु (3, 5) और (-5, 4) में भुज और कोटि के मान लिखिए।

हल- (1) बिंदु (3, 5) के लिए भुज = 3, कोटि = 5

(2) बिंदु (-5, 4) के लिए भुज = -5, कोटि = 4

प्रश्न 28. बिन्दु (-3, -8) किस चतुर्थांश में स्थित है इसमें भुज का मान क्या है?

हल- बिंदु (-3, -8) तृतीय चतुर्थांश में है। भुज = -3 है।

प्रश्न 29. बिन्दु (2, 7) किस चतुर्थांश में स्थित है इसमें कोटि का मान क्या है?

हल- बिंदु (2, 7) प्रथम (I) चतुर्थांश में स्थित है। कोटि = 7 है।

प्रश्न 30. बिन्दु (16, -12) के भुज और कोटि के मान लिखिए।

हल- भुज = 16 कोटि = -12 है।

प्रश्न 31. बिन्दुओं (-1, 3) (2, 3) (4, -5) (-3, -4) की स्थिति किन चतुर्थांश में हैं लिखिए।

हल- (1) (-1, 3) द्वितीय चतुर्थांश

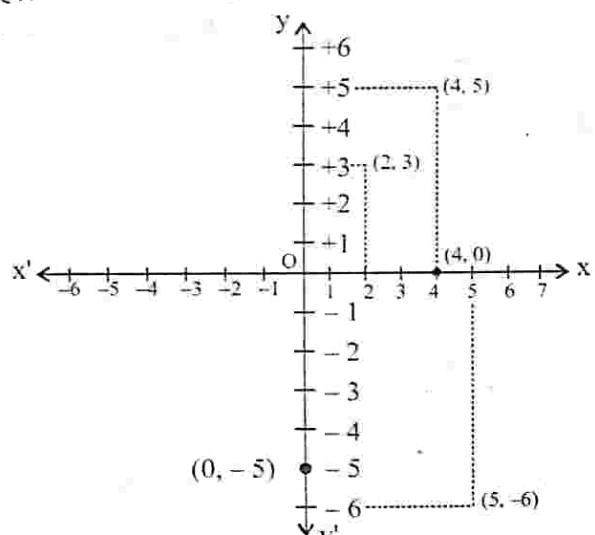
(2) (2, 3) प्रथम चतुर्थांश

(3) (4, -5) चतुर्थ चतुर्थांश

(4) (-3, -4) तृतीय चतुर्थांश

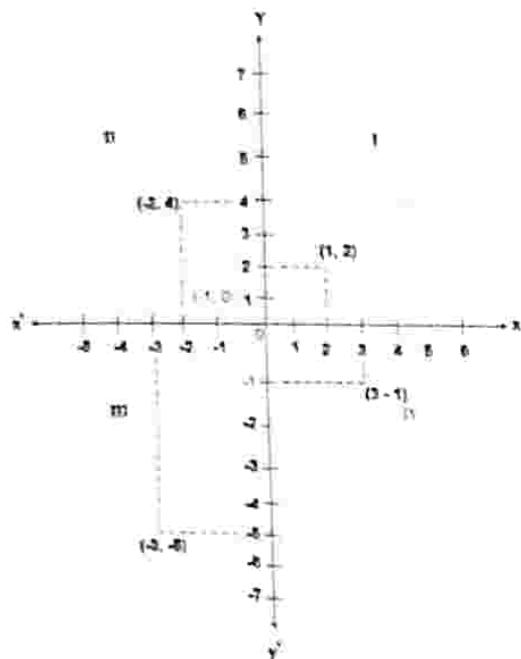
प्रश्न 32. बिन्दु (4, 0) (5, -6) (0, -5) (2, 3) और (4, 5) को कार्तीय तल में निर्धारित कीजिए।

हल-



प्रश्न 33. किस चतुर्थांश में या किस अक्ष पर बिन्दु (-2, 4) (3, -1) (-1, 0) (1, 2) स्थित है? कार्तीय तल पर इनका स्थान निर्धारण कीजिए?

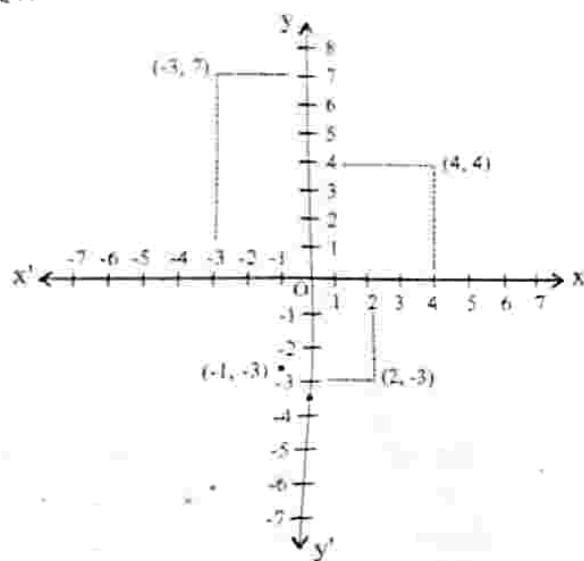
हल-



- (1) बिन्दु $(3, -1)$ चतुर्थांश IV में स्थित है।
 - (2) बिन्दु $(-1, 0)$ अक्षात्पक x-अक्ष पर स्थित है।
 - (3) बिन्दु $(1, 2)$ चतुर्थांश I में है।
 - (4) बिन्दु $(0, -1)$ अक्षात्पक y-अक्ष पर स्थित है।
- प्रश्न 34. निम्नलिखित संख्या त्रुट्मों के कार्तीय तल के बिन्दुओं के रूप में आलेखित कीजिए।
अक्षों पर पैमाना 1 सेंटीमीटर = 1 एकक लीजिए।

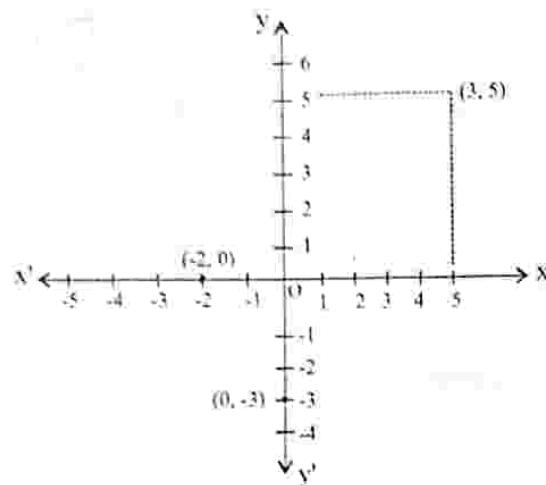
x	-3	0	-1	4	2
y	7	-3.5	-3	4	-3

हल-



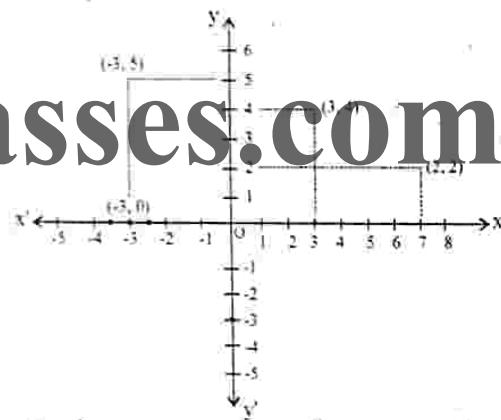
प्रश्न 35. कार्तीय तल में बिन्दुओं $(3, 5)$ $(-2, 0)$ $(0, -3)$ का स्थान निर्धारण कीजिए।

हल-



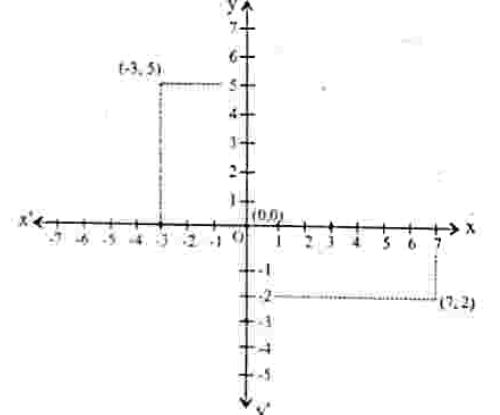
प्रश्न 36. बिन्दु $(3, 4)$ $(-3, 0)$ $(7, 2)$ $(-3, 5)$ $(0, -8)$ किस अक्ष वा किस चतुर्थांश में स्थित हैं?

हल-



प्रश्न 37. बिन्दु $(0, 0)$ $(-3, 5)$ और $(7, -2)$ को कार्तीय तल में निर्धारित कीजिए।

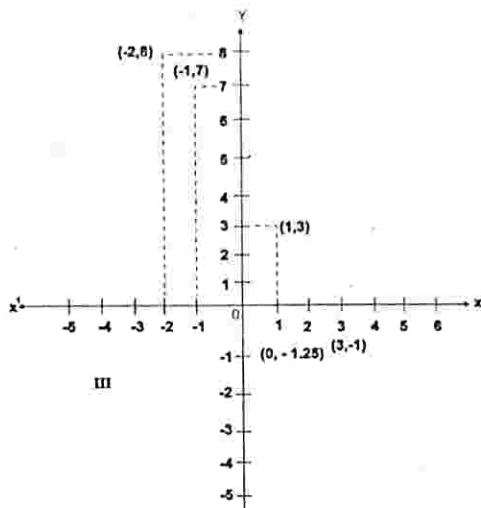
हल-



प्रश्न 38. अक्षों पर दूरी का उपयुक्त एकक लेकर नीचे सारणी में दिए गए बिन्दुओं को तल पर आलेखित कीजिए।

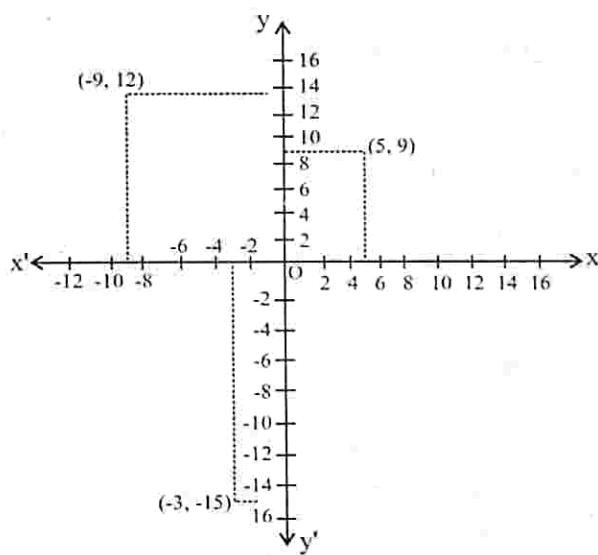
x	-2	-1	0	1	3
y	8	7	-1.25	3	-1

हल-



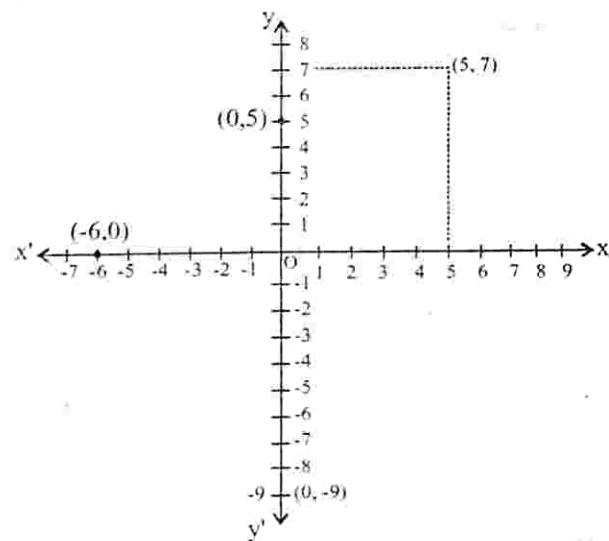
प्रश्न 39. बिन्दु (5, 9) (-9, 12) (-3, -15) का कार्तीय तल में निर्धारण कीजिए।

हल-



प्रश्न 40. बिन्दु (0,5) (0,-9) (5,7) (-6,0) का कार्तीय तल में निर्धारण कीजिए।

हल-



प्रश्न 41. कार्तीय तल में किसी बिन्दु की स्थिति निर्धारित करने वाली क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाओं के क्या नाम हैं तथा इनके प्रतिच्छेद बिन्दु का नाम क्या है?

हल- क्षैतिज अक्ष = x-अक्ष
ऊर्ध्वाधर अक्ष = y-अक्ष

दोनों अक्षों के प्रतिच्छेदी बिन्दु को मूल बिन्दु कहते हैं।

प्रश्न 42. कार्तीय तल को x-अक्ष और y-अक्ष द्वारा कितने भागों में विभाजित किया जाता है तथा उन्हें क्या कहा जाता है?

हल- चार भागों विभक्त किया जाता है तथा उन्हें चतुर्थांश कहा जाता है।

□

4

अध्याय

दो चरों वाले रैखिक समीकरण

स्मरणीय बिंदु

- $ax + by + c = 0$ के रूप के समीकरण को जहाँ a, b और c योन्निक मर्गणा हैं और a व b शून्य नहीं हैं, दो चरों वाला रैखिक समीकरण कहा जाता है।
- दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।
- दो चरों वाले प्रत्येक रैखिक समीकरण का आलेख एक सरल रेखा होता है।
- $x = 0, y -$ अक्ष का समीकरण है।
- $y = 0, x -$ अक्ष का समीकरण है।
- $x = a$ का आलेख $y -$ अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा होता है।
- $y = a$ का आलेख $x -$ अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा होता है।
- $y = mx$ के प्रकार का समीकरण मूल बिन्दु से होकर जाने वाली एक रेखा का प्रतिपत्ति कहा जाता है।
- दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख पर मिश्यव बिन्दु रैखिक समीकरण को हल होता है।
- रैखिक समीकरण का प्रत्येक हल रैखिक समीकरण के आलेख पर मिश्य एक बिन्दु होता है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

(1) $y = 3x + 5$ का

(a) एक अद्वितीय हल है (b) केवल दो हल हैं

(c) अपरिमित रूप में अनेक हल हैं (d) कोई हल नहीं है

(2) समीकरण $x - 2y = 4$ के लिए निम्न में से कौन सा एक हल है-

(a) (4,0) (b) (0,4)

(c) (4,2) (d) (8,4)

(3) समीकरण $y = a$ का आलेख एक सरल रेखा है-

(a) $y -$ अक्ष के समान्तर (b) $x -$ अक्ष के समान्तर

(c) $x -$ अक्ष के सम्भव्यत (d) उपर्युक्त में कोई नहीं

(4) $ax + by + c = 0$ के रूप के समीकरण को कहते हैं-

(a) दो चरों वाला रैखिक समीकरण

- (b) दो चरों वाला द्विघात समीकरण
(c) वर्ग समीकरण (d) उपर्युक्त में कोई नहीं

(5) दो चरों वाले रैखिक समीकरण के हल होते हैं-

(a) एक अद्वितीय हल (b) केवल दो हल हैं

(c) अपरिमित रूप से अनेक हैं (d) कोई हल नहीं है

(6) दो चरों वाले प्रत्येक रैखिक समीकरण का आलेख होता है-

- (a) एक सरल रेखा (b) लंब रेखा
(c) समान्तर रेखा (d) प्रतिच्छेदी रेखा

(7) $x = 0$ समीकरण है-

- (a) $x -$ अक्ष (b) $y -$ अक्ष
(c) $z -$ अक्ष (d) $xy -$ अक्ष

(8) $y = 0$ समीकरण है-

- (a) $x -$ अक्ष (b) $y -$ अक्ष
(c) $z -$ अक्ष (d) $xy -$ अक्ष

(9) समीकरण $2x + 3y = k$ में यदि $x = 2, y = 1$ तो k का मान है-

- (a) 7 (b) 5
(c) 8 (d) 6

(10) यदि बिन्दु (3,4) समीकरण $3y = ax + 7$ के आलेख पर स्थित है तो a का मान है-

- (a) 3/5 (b) 5/3
(c) 2/3 (d) 4/3

उत्तर- (1) (c) (2) (a) (3) (b) (4) (a) (5) (c) (6) (a)
(7) (b) (8) (a) (9) (a) (10) (b)

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(1) दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख एक होता है।

(2) समीकरण $x = a$ का आलेख $y -$ अक्ष के एक सरल रेखा होता है।

(3) $x = 0$ का समीकरण है।

(4) $x = a$ का आलेख अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा होता है।

(5) $y = a$ का आलेख अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा होता है।

(6) $y = mx$ के प्रकार का समीकरण से होकर जाने वाली एक रेखा को निरूपित करता है।

(7) रैखिक समीकरण $ax + by + c = 0$ का आलेख एक रेखा होती है।

उत्तर- (1) सरल रेखा (2) समान्तर (3) y -अक्ष (4) y -अक्ष (5) x -अक्ष (6) मूल बिन्दु (7) सरल रेखा

प्रश्न 3. सही जोड़ी बनाइए-

कॉलम-(A)	कॉलम-(B)
(1) $ax + by + c = 0$	(a) y -अक्ष का समीकरण
(2) (0,0)	(b) तृतीय चतुर्थांश
(3) $x = 0$	(c) y -अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा
(4) $y = 0$	(d) x -अक्ष का समीकरण
(5) (-1,-2)	(e) मूल बिन्दु के निर्देशांक
(6) $x = a$ का आलेख	(f) दो चरों वाले रैखिक समीकरण का मानक रूप

उत्तर- (1) (f) (2) (e) (3) (a) (4) (d) (5) (b) (6) (c)

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिये।

- (1) दो चरों वाले रैखिक समीकरण का मानक रूप लिखिए।
- (2) दो चरों वाले रैखिक समीकरण के कितने हल होते हैं?
- (3) $4x + 3y = 6$ का एक हल लिखिए।
- (4) रैखिक समीकरण $x = 3y$ का मानक रूप में लिखिए।
- (5) रैखिक समीकरण में चर राशि की उच्चतम घात कितनी होती है।

(6) रैखिक समीकरण $ax + by + c = 0$ में कितने चर हैं।
उत्तर- (1) $ax + by + c = 0$ के रूप के समीकरण को जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और a व b शून्य नहीं हैं, दो चरों वाला रैखिक समीकरण कहा जाता है। (2) अपरिमित रूप से अनेक हल (3) (0,4) या (3,0) (4) $x - 3y = 0$ (5) एक (6) दो

प्रश्न 5. सत्य/असत्य लिखिए-

- (1) $y = 0$, x -अक्ष का समीकरण होता है।
- (2) $y = mx$ के प्रकार का समीकरण मूल बिन्दु से होकर जाने वाली एक रेखा को निरूपित करता है।
- (3) दो चरों वाले रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित कोई बिन्दु रैखिक समीकरण का कोई हल नहीं होता है।
- (4) रैखिक समीकरण का प्रत्येक हल रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित एक बिन्दु होता है।
- (5) समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी या घटाई जा सकती है।

(6) समीकरण के दोनों पक्षों के समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग दिया जा सकता है।

(7) दो चरों वाले एक घात समीकरण को रैखिक समीकरण कहते हैं।

(8) दो चरों वाले रैखिक समीकरण की अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।

(9) दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख एक सरल रेखा होता है।

(10) $y = a$ का आलेख x -अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा होता है।

(11) बिन्दु (2,3) समीकरण $x + y = 4$ का हल है।

उत्तर- (1) सत्य (2) सत्य (3) असत्य (4) सत्य (5) सत्य (6) सत्य (7) सत्य (8) सत्य (9) सत्य (10) सत्य (11) असत्य

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 6. $2x + 3y = 4.37$ को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल- $2x + 3y = 4.37$ को $2x + 3y - 4.37 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ $a = 2$, $b = 3$ और $c = -4.37$ है।

प्रश्न 7. समीकरण $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\text{हल- } -\frac{y}{5} - 10 = 0$$

$ax + by + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = 1, b = -\frac{1}{5}, c = -10$$

प्रश्न 8. समीकरण $4x + 3y = 12$ के दो हल लिखिए।

हल- (i) $x = 0$ लेने पर, हमें $3y - 12$ अर्थात् $y = 4$ प्राप्त होता है। अतः (0,4) भी दिए हुए समीकरण का एक हल है। इसी प्रकार $y = 0$ लेने पर हमें $x = 3$ प्राप्त होता है। इस तरह (3,0) भी एक हल है।

प्रश्न 9. समीकरण $3y + 4 = 0$ के दो हल लिखिए।

हल- समीकरण $3y + 4 = 0$ को $0.x + 3y + 4 = 0$ के रूप में लिखने पर, x के किसी भी मान पर हमें $y = -\frac{4}{3}$ प्राप्त होगा।

अतः हमें दो हल $0, -\frac{4}{3}$ और $1, -\frac{4}{3}$ प्राप्त हो सकते हैं।

प्रश्न 10. बिन्दु (2,14) से होकर जाने वाली दो रेखाओं के समीकरण लिखिए।

हल- बिन्दु (2,14) से होकर जाने वाली रेखाओं के समीकरण निम्न हैं-

32 / प्रश्न बैंक-2023

$$7x - y = 0$$

$$x + y = 16$$

प्रकार की अनेक रेखाएँ हो सकती हैं क्योंकि एक बिन्दु से हुई अनेक अनेक रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

प्रश्न 11. समीकरण $2x + 1 = x - 3$ को हल कीजिए।

$$\text{हल- } 2x + 1 = x - 3$$

$$x = -4$$

प्रश्न 12. k के किस मान के लिए $x = 2, y = 1$ समीकरण

$$2x + 3y = k$$
 का एक हल है।

$$\text{हल- } x = 2 \text{ और } y = 1 \text{ रखने पर}$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = k$$

$$\Rightarrow 2(2) + 3(1) = k$$

$$\Rightarrow 4 + 3 = k$$

$$\Rightarrow k = 7$$

$$2 \times 2 + 3 \times 1 = k \text{ अर्थात् } k = 4 + 3 = 7 \text{ है। } k = 7$$

प्रश्न 13. यदि बिन्दु (3, 4) समीकरण $3y = ax + 7$ के

आलेख पर स्थित है तो a का मान क्या है?

$$\text{हल- } \text{बिन्दु } (3, 4) \text{ में } x = 3 \text{ और } y = 4 \text{ है।}$$

$$\text{समीकरण } 3y = ax + 7 \text{ में } x \text{ और } y \text{ का मान रखने पर}$$

$$(4) = a(3) + 7$$

$$12 = 3a + 7$$

$$a = 12 - 7$$

$$a = 5$$

$$= 5/3$$

प्रश्न 14. बिन्दु (2, 14) से होकर जाने वाली एक समीकरण लिखिए।

हल- बिन्दु (2, 14) में होकर जाने वाली दो रेखाओं का समीकरण निम्न है

$$7x - y = 0$$

$$x + y = 16$$

इस प्रकार की अनेक रेखाएँ हो सकती हैं, क्योंकि एक बिन्दु से हुई अनेक अनेक रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

प्रश्न 15. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x = 2, y = 1$

समीकरण $2x + 3y = k$ का एक हल हो।

$$\text{हल- } x = 2 \text{ और } y = 1 \text{ रखने पर}$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = k$$

$$\Rightarrow 2(2) + 3(1) = k$$

$$\Rightarrow 4 + 3 = k$$

$$\Rightarrow k = 7$$

प्रश्न 16. बिन्दु (2, 14) से होकर जाने वाली दो रेखाओं के समीकरण लिखिए। इस प्रकार की और कितनी रेखाएँ हो सकती हैं और क्यों?

हल- बिन्दु (2, 14) से होकर जाने वाली दो रेखाओं के समीकरण निम्न हैं-

$$7x - y = 0$$

$$x + y = 16$$

इस प्रकार की अनेक रेखाएँ हो सकती हैं क्योंकि एक बिन्दु से हुई अनेक अनेक रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

प्रश्न 17. एक नोटबुक की कीमत एक कलम की कीमत से दोगुनी है इस कथन को निरूपित करने के लिए दो चरों वाला एक रैखिक समीकरण लिखिए।

हल- माना पेन की कीमत = y रुपया है।

और नोटबुक की कीमत = x रुपया है प्रश्नानुसार

नोटबुक की कीमत 2 (पेन की कीमत)

$$x = 2y$$

$$x - 2y = 0$$

प्रश्न 18. $F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$ फारेनहाइट को सेल्सियस में

रूपान्तरित करने वाला एक रैखिक समीकरण है यदि ताप $C = 30^\circ$ सेल्सियस में है तो F का मान (फारेनहाइट में ताप) क्या होगा?

हल- C का मान 30° रखने पर

$$F = \left(\frac{9}{5}\right) 30 + 32$$

$$\Rightarrow F = 54 + 32$$

$$\Rightarrow F = 86$$

फारेनहाइट में तापमान = 86 है

प्रश्न 19. समीकरण $2x + 1 = x - 3$ को हल कीजिए।

$$\text{हल- } 2x - x = -3 - 1$$

$$x = -4$$

प्रश्न 20. एक नगर में टैक्सी का किराया निम्न है पहले किलोमीटर का किराया 8 रुपये और उसके बाद की दूरी के लिए प्रति किलोमीटर का किराया 5 रुपये है। यदि तय की गई दूरी x किलोमीटर हो तो कुल किराया y रुपये हो तो इसका रैखिक समीकरण लिखिए और उसका आलेख खींचिए।

हल- माना कि तय की गई दूरी = x कि.मी.

कुल किराया = y रु.

पहले कि.मी. का किराया = 8 रु.

आगे की दूरी = $(x - 1)$ कि.मी.

आगे वाली दूरी का किराया

$$= 5(x - 1) \text{ रु.}$$

प्रश्नानुसार

$$y = 8 + 5(x - 1)$$

$$y = 8 + 5x - 5$$

$$y = 8 - 5 + 5x$$

$$y = 3 + 5x$$

$$y = 5x + 3$$

प्रश्न 21. समीकरण $x + 2y = 6$ के चार अलग-अलग हल ज्ञात कीजिए।

हल- $x + 2y = 6$ दिया गया समीकरण है।

(i) $x = 0$ रखने पर

$$0 + 2y = 6$$

$$y = \frac{6}{2} \Rightarrow y = 3$$

(ii) $x = 2$ रखने पर

$$2 + 2y = 6$$

$$2y = 6 - 2$$

$$y = \frac{4}{2} = 2$$

(iii) $x = 4$ रखने पर

$$\begin{aligned} 4 + 2y &= 6 - 2y = 6 - 4 \\ 2y &= 2 \\ y &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

(iv) $x = 6$ रखने पर

$$6 + 2y = 6$$

$$2y = 6 - 6 = 0$$

$$y = \frac{0}{2} = 0$$

अतः अभीष्ट 4 हल $(0, 3), (2, 2), (4, 1), (6, 0)$ हैं।

x	0	2	4	6
y	3	2	1	0

प्रश्न 22. निम्नलिखित ऐडिक्शन समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त कीजिए। प्रत्येक स्थिति में a, b और c के मान लिखिए।

(i) $2x + 3y = 9.35$ (ii) $-2x + 3y = 6$

(iii) $x = 3y$ (iv) $3x + 2 = 0$

हल- (i) $2x + 3y = 9.35$

दिए गए समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$$\Rightarrow 2x + 3y - 9.35 = 0 \text{ तथा } a = 2, b = 3, c = 9.35$$

(ii) $-2x + 3y = 6$

दिए गए समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$$\Rightarrow 2x + 3y - 6 = 0$$

अतः $a = 2, b = 3, c = -6$

(iii) $x = 3y$

दिए गए समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$$\Rightarrow x - 3y = 0$$

अतः $a = 1, b = -3, c = 0$

(iv) $3x + 2 = 0$

दिए गए समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$$\Rightarrow 3x + 0.y + 2 = 0$$

अतः $a = 3, b = 0, c = 2$

□

www.jcdclasses.com

5

अध्याय

स्मरणीय बिंदु

1. अभिगृहीत और अभिधारणा ऐसी कल्पनाएँ हैं जो स्पष्टतः सर्वव्यापी सत्य होती हैं। इन्हें सिद्ध नहीं किया जाता है।
2. प्रमेय वे कथन हैं जिन्हें परिभाषाओं, अभिगृहीतों, पहले सिद्ध किए गए कथनों और निगमनिक तर्कण द्वारा सिद्ध या जाता है।
3. यूक्लिड के कुछ अभिगृहीत थे-

यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय

(i) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हो, एक-दूसरे के बराबर होती हैं।

(ii) यदि बराबरों को बराबरों से जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।

(iii) यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।

(iv) वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हो एक-दूसरे के बराबर होती हैं।

- (v) पूर्ण अपने भाग से बहा होता है।
 (vi) एक ही विन्दुओं के द्वारा एक समान बराबर होते हैं।
 (vii) एक ही विन्दु के आधे परस्पर बराबर होते हैं।
4. यूक्लिड की अधिकारणाएँ-
 (i) एक विन्दु से एक अन्य विन्दु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।
 (ii) एक सांत रेखा को अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।
 (iii) किसी को केन्द्र मानकर और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।
 (iv) सभी समकोण एक-दूसरे के बराबर होते हैं।
 (v) यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिर कर अपने एक ही ओर दो अंतःकोण इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिलकर दो समकोण से कम हो तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाए जाने पर उभी ओर मिलती हैं जिस और यह योग दो समकोणों से कम होता है।
5. यूक्लिड की पांचवीं अधिकारण के दो समतुल्य रूपांतरण हैं-
 (i) प्रत्येक रेखा / और उस पर न स्थित प्रत्येक विन्दु P के लिए एक अद्वितीय रेखा m ऐसी होती है जो P से होकर जाती है और m समानांतर है।
 (ii) दो भिन्न प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समानांतर नहीं हो सकती।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

(1) गणितज्ञ थेल्स का एक सबसे प्रसिद्ध शिष्य है-

- (a) आर्यभट्ट (b) पाइथागोरस
 (c) रामानुजनम (d) आईस्टीन

(2) सिंधु घाटी सभ्यता में प्रयुक्त ईट के लिए अनुपात लम्बाई, चौड़ाई, मोटाई थी-

- (a) 1:2:3 (b) 3:2:1
 (c) 4:2:1 (d) 1:2:4

(3) पिरामिड एक ऐसी ठोस आकृति होती है जिसका आधार नहीं होता-

- (a) त्रिभुज (b) वर्ग
 (c) वहुभुज (d) रेखा

(4) यूक्लिड ने अपनी प्रसिद्ध कृति एलीमेंट्स को कितने अध्यायों में विभाजित किया है-

- (a) 10 (b) 11
 (c) 12 (d) 13

(5) यूक्लिड है-

- (a) यूनानी (b) प्रिस्वासी
 (c) रोमवासी (d) भारतीय

उत्तर- (1) (b) (2) (c) (3) (d) (4) (d) (5) (b)

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

- (1) वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हो, एक दूसरे के होती हैं।

(2) पूर्ण अपने भाग से होता है।

(3) एक वह है जिसकी केवल लंबाई व चौड़ाई होती है।

(4) एक रेखा के सिरे होते हैं।

(5) पृष्ठों की परिसीमाएँ होती हैं।

(6) एक सांत रेखा को रूप से बढ़ाया जा सकता है।

उत्तर- (1) बराबर (2) चौड़ा (3) पृष्ठ (4) विन्दु (5) वक्र/सीधी रेखाएँ (6) अनिश्चित।

प्रश्न 3. सही जोड़ी बनाइए

कॉलम-(A) कॉलम-(B)

- (1) दो भिन्न प्रतिच्छेदी रेखाएँ (a) रेखाएँ होती हैं एवं वे रेखाएँ के

- (2) एक सांत रेखा को (b) एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

(3) सभी समकोण (c) उभयनिष्ठ नहीं हो सकता

(4) दो भिन्न रेखाओं में एक (d) समांतर नहीं हो सकती से अधिक विन्दु

(5) दिए हुए दो विन्दुओं से (e) अनिश्चित रूप से बढ़ाया होकर जा सकता है।

(6) पृष्ठ के किनारे- (f) एक दूसरे के बराबर होते हैं।

उत्तर- (1) (d) (2) (e) (3) (f) (4) (c) (5) (b) (6) (a)

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिये।

(1) यूक्लिड की प्रथम अधिगृहित क्या है?

(2) यूक्लिड की पांचवीं अधिगृहीत लिखिए।

(3) एक ठोस की परिसीमाएँ क्या कहलाती हैं?

(4) एक रेखा के सिरे क्या होते हैं?

(5) सिंधु घाटी की सभ्यता प्रयुक्त ईट के लिए लंबाई ; चौड़ाई ; मोटाई क्या थी?

हल- (1) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, एक दूसरे के बराबर होती हैं। (2) पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है (3) पृष्ठ (4) बिन्दु (5) $4 : 2 : 1$

प्रश्न 5. सत्य/असत्य लिखिए।

- (1) प्राचीन भारत में सुल्वासूत्र ज्यामितीय रचनाओं के लिए महत्वपूर्ण ग्रंथ थे।
 - (2) श्रीयंत्र में एक-दूसरे के साथ जुड़े नौ समष्टिवाहु त्रिभुज अंतर्निहित हैं।
 - (3) एक ठोस की तीन विमाएँ होती हैं।
 - (4) एक पृष्ठ की दो विमाएँ होती हैं।
 - (5) एक रेखा की एक विमा होती है।
 - (6) एक बिन्दु की कोई विमा नहीं होती है।
 - (7) एक बिन्दु से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।
 - (8) दो भिन्न बिन्दुओं से होकर जाने वाली असंख्या रेखाएँ हैं।
 - (9) यदि दो वृत्त बराबर हैं, तो उनकी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।
- उत्तर- (1) सत्य (2) सत्य (3) सत्य (4) सत्य (5) सत्य (6) सत्य (7) असत्य (8) असत्य (9) सत्य।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न (2 अंक)

प्रश्न 6. परिभाषित कीजिए “समान्तर रेखाएँ”

हल- समान्तर रेखाएँ- वे रेखाएँ जो एक दूसरे का प्रतिच्छेद नहीं करती, समान्तर रेखाएँ कहलाती हैं।

प्रश्न 7. परिभाषित कीजिए “लम्ब रेखाएँ”

हल- लम्ब रेखाएँ- वे रेखाएँ जिनके बीच का कोण समकोण हो लम्ब रेखाएँ कहलाती हैं।

प्रश्न 8. परिभाषित कीजिए “रेखाखण्ड”

हल- रेखाखण्ड- वह रेखा जिनके दो निश्चित अंतःबिन्दु हो, रेखाखण्ड कहलाती है।

प्रश्न 9. परिभाषित कीजिए “वृत्त की त्रिज्या”

हल- वृत्त की त्रिज्या- वृत्त के केन्द्र से वृत्त की परिधि पर स्थित किसी बिन्दु से मिलाने वाला रेखाखण्ड, वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।

प्रश्न 10. परिभाषित कीजिए “वर्ग”

हल- वर्ग- वह चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ समान हो तथा उनके बीच का कोण समकोण हो, वर्ग कहलाती है।

प्रश्न 11. आप यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा को किस

प्रकार लिखेंगे ताकि वह सरलता से समझी जा सके।

हल- इस परिणाम को निम्नलिखित रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है: दो भिन्न प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर नहीं हो सकती।

लघु उत्तरीय प्रश्न (3 अंक)

प्रश्न 12. यदि दो बिन्दुओं A और B के बीच एक बिन्दु C ऐसा स्थित है कि $AB = BC$ तो सिद्ध कीजिए कि $AC = \frac{1}{2} AB$ है। एक आकृति खींचकर स्पष्ट कीजिए।

हल-

$$AC = BC$$

बराबरों को बराबरों में जोड़ने पर

$$\text{इसलिए } AC + AC = BC + AC$$

$$2AC = AB$$

$$(BC + AC = AB)$$

$$AC = \frac{1}{2} AB$$

प्रश्न 13. आकृति में यदि $AC = BD$ है तो सिद्ध कीजिए कि $AB = CD$

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array}$$

हल- दिया है $AC = BD$ (1)

$$AC = AB + BC \quad \dots\dots(2)$$

चूंकि B बिन्दुओं A और C के बीच स्थित है

$$BD = BC + CD \quad \dots\dots(3)$$

चूंकि C बिन्दुओं B और D के बीच स्थित है।

$$\text{सभी } (1), (2) \text{ और } (3) \text{ से}$$

$$AB + BC = BC + CD$$

$$\text{तथा } AB + BC - BC = BC + CD - BC$$

$$AB = CD$$

अतः यूक्लिड के अभिगृहीत के अनुसार 'यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।'

विश्लेषणात्मक प्रश्न (4 अंक)

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए रेखाखण्ड, पर समबाहु त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

हल- अब $AB = AC$, है, क्यों ये एक वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।(1)

इसी प्रकार $AB = BC$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ) (2)

उपरोक्त दोनों तथ्यों और यूक्लिड के पहले अभिगृहीत (वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर होती हैं एक दूसरे के बराबर होती है) से आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $AB = BC = AC$ है।

अतः $\triangle ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है।

ध्यान दीजिए कि यहाँ यूक्लिड ने, बिना कहीं बताए, यह मान लिया है कि केन्द्रों A और B को लेकर खींचे गए वृत्त परस्पर एक बिन्दु पर मिलेंगे।

अब हम एक प्रयोग मिला करेंगे जो विभिन्न परिणामों में अनेक बार अधिकाशत् प्रयोग की जाती है।

प्रश्न 15. यदि A, B और C एक रेखा पर स्थित तीन बिन्दु हैं और B बिन्दुओं A और C के बीच स्थित है तो सिद्ध कीजिए कि $AB + BC = AC$ है।



6

अध्याय

रेखाएँ और कोण

स्पर्णीय बिंदु

1. कोणों की माप एवं कोणों के प्रकार।
2. प्रतिच्छेदी रेखाएँ और अप्रतिच्छेदी रेखाएँ।
3. कोणों के युग्म (यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो तो इस प्रकार बने दोनों आमने कोणों का योग 180° होता है)।
4. यदि दो रेखाएँ परम्पर प्रतिच्छेद करे तो शोषणभिन्न कोण बनाते हैं।
5. यदि एक तिर्यक रेखा दो समान रेखाओं को प्रतिच्छेद करे, तो
 - (अ) संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।
 - (ब) एकातर अन्तः कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।
 - (स) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तःकोणों का प्रत्येक युग्म सम्पूरक होता है।
6. यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि या तो
 - (अ) संगत कोणों का कोई एक युग्म बराबर हो। या
 - (ब) एकातर अन्तः कोणों का कोई एक युग्म बराबर हो। या
 - (स) तिर्यक रेखा के एकही ओर के अन्तःकोणों का कोई एक युग्म सम्पूरक हो तो वे दोनों रेखाएँ समान होती हैं।
7. वे रेखाएँ जो एक ही रेखा के समान्तर होती हैं परम्पर समान्तर होती हैं।
8. एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है समान्तर होती है।
9. यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाया जाए, तो उस प्रकार बना व्याप्तिकोण अपने दोनों अन्तः अभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है।

उपरोक्त आकृति में, $AB + BC$ के साथ संपाती है।

याथ ही, युक्तिह का अधिगृहीत (4) कहता है कि वे वस्तुएँ जो परम्पर हो एक दूसरे के बराबर होती हैं। अतः यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$AB + BC = AC$$

ही फ्यान दीजिए कि इस तल में यह मान लिया गया है कि दो बिन्दुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खीची जा सकती है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

(1) यदि तीन या अधिक बिन्दु एक ही रेखा पर स्थित हों तो वे कहलाते हैं-

- | | |
|------------------|----------------------------|
| (a) संसरख बिन्दु | (b) असंसरख बिन्दु |
| (c) समाती बिन्दु | (d) उपर्युक्त में कोई नहीं |

(2) एक न्यून कोण का माप है-

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) 0° और 90° के बीच | (b) 90° और 180° के बीच |
| (c) 90° और 360° के बीच | (d) 180° और 270° के बीच |

(3) वे दो कोण जिनका योग 180° हो कहलाते हैं-

- | | |
|--------------|--------------------|
| (a) पूरक कोण | (b) संपूरक कोण |
| (c) आमने कोण | (d) प्रतिवर्ती कोण |

(4) किसी त्रिभुज के सभी कोणों का योग होता है-

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (a) 60° | (b) 90° |
| (c) 180° | (d) 360° |

(5) किसी समकोण त्रिभुज का एक कोण 50° तो शेष कोणों की माप होगी-

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| (a) $90^\circ, 50^\circ$ | (b) $90^\circ, 40^\circ$ |
| (c) $90^\circ, 60^\circ$ | (d) $130^\circ, 180^\circ$ |

(6) एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल होता है-

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (a) 60° | (b) 90° |
| (c) 130° | (d) 180° |

(7) दो कोण जिनका योग 180° हो, कहलाता है-

- | | |
|---------------|----------------|
| (a) अधिक कोण | (b) आमने कोण |
| (c) न्यून कोण | (d) संपूरक कोण |

(8) तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अन्तःकोणों का योग होता है-

www.jcdclasses.com

- (a) 360° (b) 90°
 (c) 180° (d) 270°

(9) पूर्ण कोण का मान होता है-

- (a) 70° (b) 270°
 (c) 360° (d) 180°

उत्तर- (1) (a) (2) (a) (3) (b) (4) (c) (5) (b) (6) (d) (7)
 (d) (8) (c) (9) (c)

प्रश्न 2. सत्य/असत्य लिखिए-

- (1) वे रेखाएँ जो एक ही रेखा के समांतर होती हैं परस्पर समान्तर होती हैं।
 (2) यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें, तो शीर्षभिमुख कोण बराबर होते हैं।
 (3) यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाया जाए, तो इस प्रकार बना बहिष्कोण अपने दोनों अन्तः अभिमुख कोणों के योग से अधिक होता है।
 (4) एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।
 (5) प्रतिवर्ती कोण की माप 180° से अधिक एवं 360° के मध्य होता है।
 (6) जब दो असमान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करें तो एकांतर कोण बराबर होते हैं।
 (7) त्रिभुज की माप 360° होती है।

उत्तर- (1) सत्य (2) सत्य (3) असत्य (4) सत्य (5) सत्य (6) असत्य (7) असत्य

प्रश्न 3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

- (1) वह कोण जो 180° से अधिक, परन्तु 360° से कम माप का होता है एक कहलाता है।
 (2) जब दो किरणें एक ही अन्त विन्दु से प्रारंभ होती हैं, तो एक बनता है।
 (3) एक रेखा का वह भाग जिसके दो अंतविन्दु हो एक कहलाता है।
 (4) रेखा का वह भाग जिसका एक अंतविन्दु हो एक कहलाता है।
 (5) दो कोण जिनका योग 90° हो कहलाता है।
 (6) यदि तीन से अधिक विन्दु एक ही रेखा पर स्थित हों तो वे कहलाते हैं।
 (7) एक त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योग होता है।
 (8) तीर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तःकोण होते हैं।
 (9) यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें तो शीर्षभिमुख कोण होते हैं।

- (10) दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करें तो संगत कोण होते हैं।

- (11) एक रेखा का वह भाग जिनके दो अन्तः विन्दु होते हैं कहलाता है।

उत्तर- (1) प्रतिवर्ती कोण (2) कोण (3) रेखाखंड (4) किरण (5) पूरक (6) संरेख (7) 180° (8) संपूरक (9) बराबर (10) बराबर (11) रेखाखण्ड।

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिये-

- (1) एक 'ऋजु कोण' की माप क्या होती है?
 (2) अधिक कोण के माप की परास क्या होती है?
 (3) एक समकोण की माप क्या होती है?
 (4) एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग कितना होता है।
 (5) समवाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोण की माप कितनी होती है।
 (6) यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं तो शीर्षभिमुख कोणों में क्या संबंध होता है।
 (7) जिन दो कोणों का योग 180° हो तो कौन सा कोण कहलाता है।

उत्तर- (1) 180° (2) 90° से 180° के बीच (3) 90° (4) 180° (5) 60° (6) शीर्षभिमुख कोण बराबर होते हैं। (7) संपूरक कोण।

प्रश्न 5. मही जोड़ी बनाइए-

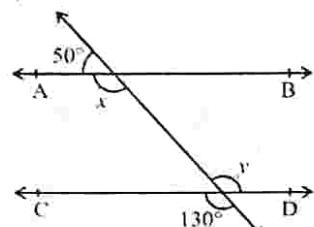
कॉलम-(A)

- (1) एक ही रेखा के समांतर खींची गई दो रेखाएँ होती हैं।
 (2) जिन दो कोणों का योग 180° हो समान
 (3) जिन दो कोणों का योग 90° हो संपूरक कोण
 (4) उभयनिष्ठ अन्तः विन्दु किरण
 (5) शीर्षभिमुख कोणों की माप पूरक कोण
 (6) एक रेखा का वह भाग जिनका एक अन्तविन्दु हो समांतर अन्तः विन्दु हो कहलाती है।

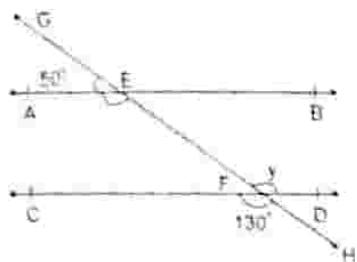
उत्तर- (1) (f) (2) (c) (3) (e) (4) (a) (5) (b) (6) (d)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 6.

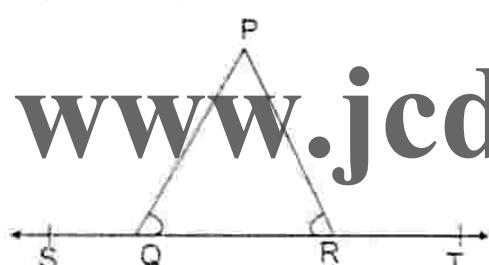


उपरोक्त आकृति में x और y का मान बताइये।



हल- चूंकि किरण AE रेखा GH पर खड़ी है
इसलिए $\angle AEG + \angle AEH = 180^\circ$
 $50^\circ + x = 180^\circ$
 $x = 180^\circ - 50^\circ$
 $x = 130^\circ \quad \dots(1)$
 $y = 130^\circ \quad \dots(2)$ (शीर्षभिमुख कोण)
समी. (1) और (2) से ज्ञात है कि $x = y$
अतः $AB \parallel CD$ (ये एकांतर कोण हैं)

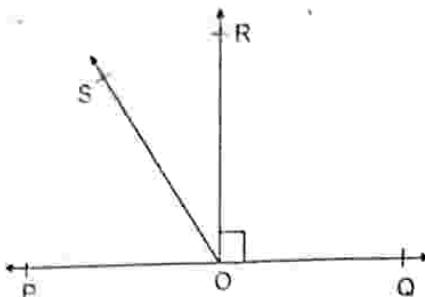
प्रश्न 7. दी गई आकृति में $\angle PQR = \angle PRQ$ है तो सिद्ध कीजिए कि मैं $\angle PQS = \angle PRT$



हल- चूंकि किरण PQ किरण ST पर खड़ी है
इसलिए $\angle PQS + \angle PQR = 180^\circ$
(रेखिक युग्म अभिगृहीत)
चूंकि किरण PR किरण ST पर खड़ी है।
इसलिए $\angle PRT + \angle PRQ = 180^\circ$
(रेखिक युग्म अभिगृहीत)
समीकरण (1) और (2) से
 $\angle PQS + \angle PQR = \angle PRT + \angle PRQ$
चूंकि दिया है $\angle PQR = \angle PRQ$
अतः $\boxed{\angle PQS = \angle PRT}$

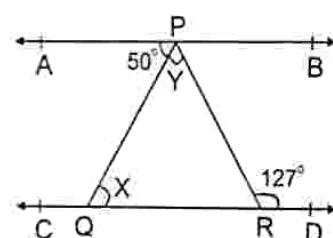
प्रश्न 8. दी गई आकृति में POQ एक रेखा है। किरण OR रेखा PQ पर लम्ब है। किरणों OP और OR के बीच में OS एक अन्य किरण है। सिद्ध कीजिए

$$\angle ROS = \frac{1}{2} (\angle QOS - \angle POS)$$



हल- चूंकि किरण OR रेखा PQ पर लम्ब है।
इसलिए $\angle QOR = \angle POR = 90^\circ \quad \dots(1)$
 $\angle QOS = \angle QOR + \angle ROS \quad \dots(2)$
 $\angle POS = \angle POR - \angle ROS \quad \dots(3)$
समी. (2) और (3) को घटाने पर
 $\angle QOS - \angle POS = \angle QOR + \angle ROS$
 $- (\angle POR - \angle ROS)$
 $\angle QOS - \angle POS = \angle QOR + \angle ROS$
 $- \angle POR + \angle ROS$
 $\angle QOS - \angle POS = \angle QOR - \angle POR + 2\angle ROS$
समी. (1) से $\angle QOR = \angle POR$
अतः $\angle QOS = \angle POS = 2\angle ROS$
 $\angle ROS = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle QOS)$

प्रश्न 9. दी गई आकृति में, यदि $AB \parallel CD$, $\angle APQ = 50^\circ$ और $\angle PRD = 127^\circ$ है तो x और y ज्ञात कीजिए।



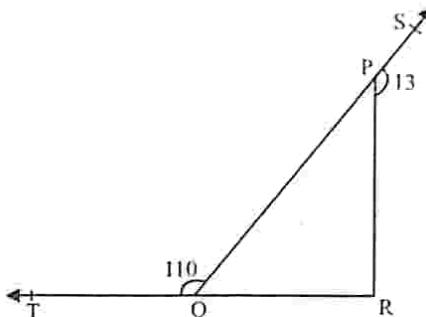
हल- दिया $AB \parallel CD$ है
 $x = \angle APQ$ (एकांतर अंतः कोण)
 $x = \angle APQ = 50^\circ$
 $y + x = \angle PRD$
(चूंकि एक त्रिभुज की एक भुज बढ़ाई जाए तो इस प्रकार वहाँ योग के बराबर होता है।)

$$y + 50^\circ = \angle PRD = 127^\circ \text{ (चूंकि } x = 50^\circ \text{)}$$

$$y = 127^\circ - 50^\circ$$

$$\boxed{y = 77^\circ}$$

प्रश्न 10. दी गई आकृति में त्रिभुज PQR की भुजाओं PQ और RQ को क्रमशः बिन्दुओं S तथा T तक बढ़ाया गया है यदि $\angle SPR = 135^\circ$ है और $\angle PQT = 110^\circ$ है तो $\angle PRQ$ ज्ञात कीजिए।



हल- परन्तु दिया है, $\angle PQT = 110^\circ$

$$110^\circ + \angle PQR = 180^\circ$$

$$\angle PQR = 180^\circ - 110^\circ$$

$$\boxed{\angle PQR = 70^\circ} \quad \dots\dots\dots(1)$$

इसी प्रकार QS एक रेखा है।

$$\text{अतः } \angle SPR + \angle QPR = 180^\circ$$

$$\text{दिया है, } \angle SPR = 135^\circ$$

$$\text{तब } 135^\circ + \angle PQR = 180^\circ$$

$$\angle PQR = 180^\circ - 135^\circ$$

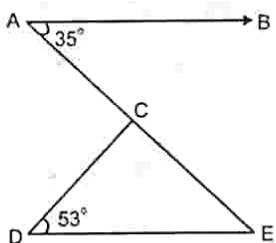
$$\boxed{\angle PQR = 45^\circ} \quad \dots\dots\dots(2)$$

अब $\triangle PQR$ में

$$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180^\circ$$

प्रश्न 11. दी गई आकृति में $AB \parallel DE$, $\angle BAC = 35^\circ$

और $\angle CDE = 53^\circ$ है तो $\angle DCE$ ज्ञात कीजिये।



हल- $\angle BAC = \angle DCE = 35^\circ$

(एकांतर अंतर कोण)

दिया है $\angle CDE = 53^\circ$

$\triangle CDE$ में

$$\angle CDE + \angle DEC + \angle DCE = 180^\circ$$

चूंकि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

$$53^\circ + 35^\circ + \angle DCE = 180^\circ$$

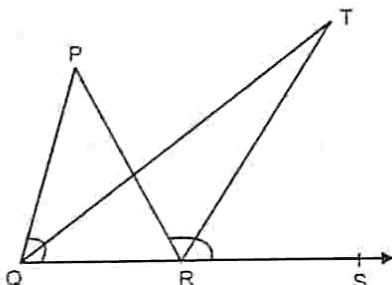
$$88^\circ + \angle DCE = 180^\circ$$

$$\angle DCE = 180^\circ - 88^\circ$$

$$\boxed{\angle DCE = 92^\circ}$$

अतः $\angle DCE = 92^\circ$

प्रश्न 12. दी गई आकृति में यदि रेखाएँ PQ और RS बिन्दु T पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती हैं कि $\angle PRT = 40^\circ$, $\angle RPT = 95^\circ$ और $\angle TSQ = 75^\circ$ हैं तो $\angle SQT$ ज्ञात करो।



उपरोक्त आकृति में त्रिभुज PQR की भुजा QR को बिन्दु S तक बढ़ाया गया है यदि PQR और PRS के समद्विभाजक बिन्दु T पर मिलते हैं तो सिद्ध कीजिये कि $2\angle QTR = \angle QPR$

हल- (चूंकि बहिस्कोण अपने दोनों अंतर्मुख कोणों के योग के बराबर होता है।)

इसी प्रकार $\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR \dots\dots\dots(2)$

(यहाँ $\angle PRS$ बहिस्कोण तथा $\angle PQR$, $\angle QPR$ अंतर्मुख कोण हैं।)

$PRS = 2\angle TRS$ चूंकि RT, $\angle PRS$ का अर्द्धक है।

इसी प्रकार $PQS = 2\angle TQR$

चूंकि का QT, $\angle PQR$ अर्द्धक है।

अतः $2\angle TRS$

$$= 2\angle TQR + \angle QPR$$

$$= 2\angle TRS - 2\angle TQR$$

$$= \angle QPR$$

$$= 2(\angle TRS - \angle TQR) \dots\dots\dots(3)$$

$$= \angle QPR$$

समी. (1) से

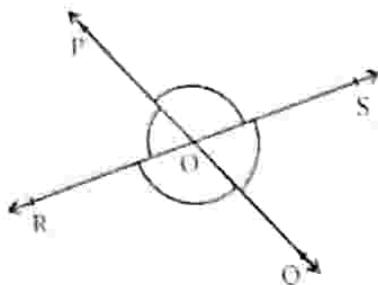
$$\angle TRS - \angle TQR = \angle QTR \dots\dots\dots(4)$$

समी. (3) और (4) से

$$2\angle QTR = \angle QPR$$

$$= \boxed{\angle QTR = \frac{1}{2}\angle QPR}$$

प्रश्न 13. दी गई आकृति में रेखाएँ PQ और RS परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं यदि $\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ है तो सभी कोण ज्ञात कीजिए।



हल- $\angle POR + \angle ROQ = 180^\circ$ (रौखिक युग्म के कोण)

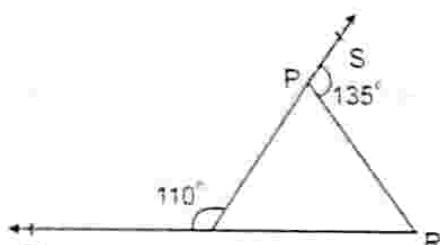
परन्तु $\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ दिया है

$$\text{अतः } \angle POR = \frac{5}{12} \times 100 = 75^\circ$$

$$\text{इसी प्रकार } \angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180^\circ = 105^\circ$$

अब $\angle POS = \angle ROQ = 105^\circ$ (शोषणभिन्नख कोण)
और $\angle SOQ = \angle POR = 75^\circ$ (शोषणभिन्नख कोण)

प्रश्न 14. दी गई आकृति में PQR की भुजाओं QP और RQ को क्रमशः बिन्दुओं S तथा T कक बढ़ाया गया है। यदि $\angle SPR = 135^\circ$ तथा $\angle PQT = 110^\circ$ तो $\angle PRQ$ ज्ञात कीजिए।



हल- दिया है, $\angle PQT = 110^\circ$

$$110^\circ + \angle PQR = 180^\circ$$

$$\angle PQR = 180^\circ - 110^\circ$$

$$\boxed{\angle PQR = 70^\circ}$$

इसी प्रकार QS एक रेखा है।

अतः $\angle SPR + \angle QPR = 180^\circ$

दिया है, $\angle SPR = 135^\circ$

$$\text{तब } 135^\circ + \angle PQR = 180^\circ$$

$$\angle PQR = 180^\circ - 135^\circ$$

$$\boxed{\angle PQR = 45^\circ}$$

अब $\triangle PQR$ में

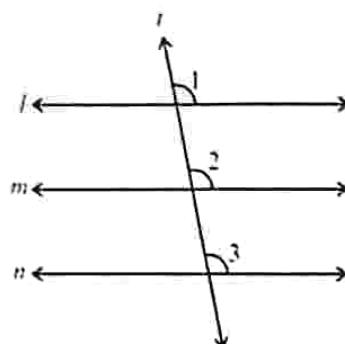
$$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180^\circ$$

चौक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $= 180^\circ$ होता है।

$$70^\circ + 45^\circ + \angle PRQ = 180^\circ$$

प्रश्न 15. सिद्ध कीजिए कि दो रेखाएँ जो एक ही रेखा के समान्तर हो परस्पर समान्तर होती हैं।

हल-



आइए रेखाओं l, m और n के लिए एक तिर्यक रेखा t खींचें।

पहले हम देखें कि $m \parallel n$ है।

अतः $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 1 = \angle 3$ है (संगत कोण अभिगृहीत)

इसलिए $\angle 2 = \angle 3$

परन्तु $\angle 2$ और $\angle 3$ संगत कोण हैं और बराबर हैं।

अतः आप कह सकते हैं कि

$$m \parallel n \quad (\text{संगत कोण अभिगृहीत का विलोम})$$

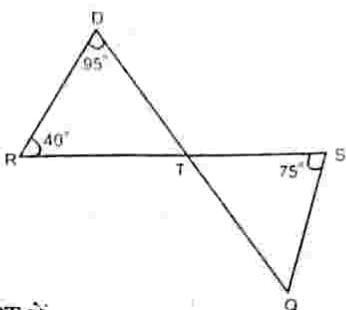
प्रश्न 16. दी गई आकृति में यदि $\angle PQR = \angle PRQ$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PQS = \angle PRT$

हल- देखिए अ.ल.उ. प्रश्न 7

प्रश्न 17. दी गई आकृति में x और y के मान ज्ञात कीजिए और फिर दर्शाइए कि $AB \parallel CD$ है।

हल- देखिए अ.ल.उ. प्रश्न 6

प्रश्न 18. यदि $\angle XYZ = 64^\circ$ है और XY को बिन्दु P तक बढ़ाया गया है। यदि किरण YQ, $\angle ZYP$ को समद्विभाजित करती है तो आकृति खींचिकर $\angle XYP$ और प्रतिवर्ती $\angle QYP$ के मान ज्ञात कीजिए।



हल- $\triangle PRT$ में,

$$\angle PRT + \angle PTR + \angle RPT = 180^\circ$$

चूंकि त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180° होता है।

$$\angle PTR + 40^\circ + 95^\circ = 180^\circ$$

$$\angle PTR + 135^\circ = 180^\circ$$

$$\angle PTR = 180^\circ - 135^\circ$$

$$\angle PTR = 45^\circ$$

$$\angle PTR = \angle QTS = 45^\circ \text{ (शीर्षभिन्नख त्रिभुज कोण)}$$

$\triangle TSQ$ में

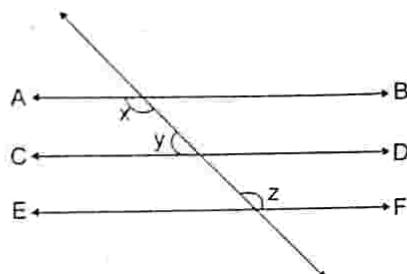
$$\angle QTS + \angle TSQ + \angle SQT = 180^\circ$$

चूंकि त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180° होता है।

$$45^\circ + 75^\circ + \angle SQT = 180^\circ$$

$$\angle SQT + 120^\circ = 180^\circ$$

प्रश्न 19. दो गई आकृतियाँ में यदि $AB \parallel CD$ तथा $CD \parallel EF$ और $y:z = 3:7$ तो x का माप ज्ञात कीजिए।



हल- दिया है, $AB \parallel CD$ तथा

$CD \parallel EF$

इस कारण $AB \parallel EF$

चूंकि एक ही रेखा की समांतर रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।

$$x = z \quad (\text{एकांतर अंतःकोण}) \quad \dots(1)$$

$$x+y = 180^\circ \quad \dots(2)$$

समी. (1) और (2) से

$$z + y = 180^\circ$$

परन्तु दिया है, $y:z = 3:7$

$$\text{अनुपातों का योग} = 3 + 7 = 10$$

$$\text{अतः } y = \frac{3}{10} \times 180^\circ = 54^\circ$$

$$y = 54^\circ$$

www.jedellasses.com

7

अध्याय

त्रिभुज

स्पर्शीय बिंदु

- सर्वांगसम आकृतियाँ-दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं यदि उनका एक ही आकार हो और एक ही माप हो।
- समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं।
- समान भुजाओं वाले दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं।
- सर्वांगसमता नियम (SAS,ASA,AAS,RHS)
- त्रिभुज की बराबर भुजों के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
- त्रिभुज की बराबर कोण की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
- समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 90° का होता है।
- किसी त्रिभुज में बड़ी भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।
- किसी त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है।
- किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

(1) दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं यदि उनका-

(a) एक ही आकार और माप हो

(b) एक ही प्रकार हो

(c) एक ही रूप के हो (d) उपर्युक्त में कोई नहीं

(2) त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण होते हैं-

(a) असमान

(b) समान या बराबर

(c) कुछ कह नहीं सकते

(d) उपर्युक्त में कोई नहीं

(3) एक समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है और यदि $C = 45^\circ$ तो $\angle A$ की माप होगी-

(a) 40° (b) 50°

(c) 55° (d) 45°

(4) एक समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण होता है-

- (a) 90°
- (b) 180°
- (c) 45°
- (d) 60°

(5) निम्नलिखित में से कौन त्रिभुजों के सर्वांगसमता की कसौटी नहीं है-

- (a) SAS
- (b) ASA
- (c) SSA
- (d) SSS

(6) समान आकार एवं समान माप वाली आकृतियाँ कहलाती हैं-

- (a) सर्वांगसम
- (b) समान
- (c) समरूप
- (d) बराबर

(7) किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से होता है-

- (a) बड़ा
- (b) छोटा
- (c) बराबर
- (d) इनमें से कोई नहीं

(8) समकोण त्रिभुज में सबसे बड़ी भुजा होती है-

- (a) कर्ण
- (b) लम्ब
- (c) आधार
- (d) इनमें से कोई नहीं

उत्तर- (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)

(a) (8) (e)

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(1) समान भुजाओं वाले दो त्रिभुज होते हैं।

(2) त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ होती हैं।

(3) यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज होते हैं।

(4) एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर हो त्रिभुज कहलाता है।

(5) किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से होता है।

(6) किसी त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा होती है।

(7) समान त्रिज्याओं वाले दो त्रिभुज होते हैं।

(8) समकोण त्रिभुज में सबसे बड़ी भुजा होती है।

उत्तर- (1) सर्वांगसम (2) बराबर/समान (3) सर्वांगसम (4)

समद्विबाहु (5) बड़ा (6) बड़ी (7) सर्वांगसम (8) कर्ण

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

(1) समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 50° होता है।

(2) समान भुजाओं वाले दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(3) यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे दो भुजाओं की दो भुजाओं और अंतर्गत कोण बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(4) एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और संगत भुजा के बराबर होने पर भी दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं होते हैं।

(5) एक त्रिभुज के दो कोण और अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(6) समान त्रिज्याओं वाले दो त्रिभुज समरूप होते हैं।

(7) दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं यदि उनका एक ही आकार हो और एक ही माप हो।

(8) यदि दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हों तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(9) समद्विबाहु त्रिभुज के तीनों कोण बराबर होते हैं।

(10) यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हो तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

उत्तर- (1) असत्य (2) सत्य (3) सत्य (4) असत्य (5) सत्य

(6) सत्य (7) असत्य (8) असत्य (9) असत्य (10) सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिये।

(1) सर्वांगसम आकृतियाँ किसे कहते हैं?

(2) समबाहु त्रिभुज क्या होता है?

(3) समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोण की माप क्या होती है?

(4) समान आकार एवं समान माप वाली आकृतियाँ क्या कहलाती हैं?

(5) जिस त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ समान हों उसे कौन सा त्रिभुज कहते हैं।

(6) किसी त्रिभुज में अधिकतम कितने समकोण हो सकते हैं।

(7) किसी त्रिभुज में कम से कम कितने न्यून कोण हो सकते हैं।

(8) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग कितना होता है?

(9) एक त्रिभुज में कितनी भुजाएँ शीर्ष एवं कोण होते हैं लिखिए।

उत्तर- (1) वे आकृतियाँ जिनके आकार और माप समान हों।

(2) ऐसा त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाओं की माप समान हों। (3)

60° (4) सर्वांगसम (5) समबाहु (6) एक (7) दो (8) 180°

(9) तीन भुजाएँ, तीन शीर्ष एवं तीन कोण।

प्रश्न 5. सही जोड़ी बनाइए-

- | कॉलम-(A) | कॉलम-(B) |
|---|--------------------------|
| (1) त्रिभुज जिसका एक कोण 90° हो | (a) सर्वांगसम |
| (2) त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ समान हों | (b) बड़ी |
| (3) त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ समान हों (c) समकोण | |
| (4) बड़े कोण की सम्मुख भुजा | (d) समवाहु |
| (5) समान भुजाओं वाले दो त्रिभुज | (e) समद्विबाहु होते हैं। |

उत्तर- (1) (c) (2) (e) (3) (d) (4) (b) (5) (a)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न (2 अंक)**प्रश्न 6. त्रिभुज किसे कहते हैं?**

हल- तीन प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा बनायी गई एक बंद आकृति एक त्रिभुज कहलाती है।

प्रश्न 7. सर्वांगसम आकृतियों को परिभाषित करो।

हल- दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं यदि वे एक ही आकार तथा एक ही माप की हो।

प्रश्न 8. RHS सर्वांगसमता नियम को लिखिए।

हल- **RHS सर्वांगसमता नियम:** यदि दो समकोण त्रिभुजों में एक त्रिभुज का कर्ण और एक क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और

एक भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

प्रश्न 9. SAS सर्वांगसमता नियम को लिखिए।

हल- यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा अन्तर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं तथा अन्तर्गत कोण के बराबर हो तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (सर्वांगसमता नियम से)

प्रश्न 10. ASA सर्वांगसमता नियम को लिखिए।

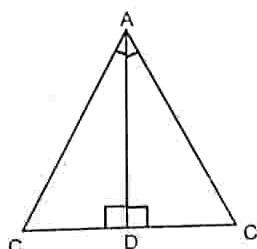
हल- यदि एक त्रिभुज के दो कोण और अन्तर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और अन्तर्गत भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (ASA सर्वांगसमता नियम)

प्रश्न 11. AAS सर्वांगसमता नियम को लिखिए।

हल- यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और संगत भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (AAS सर्वांगसमता नियम)

प्रश्न 12. $\triangle ABC$ में $\angle A$ का समद्विभाजक AD भुजा BC पर लम्ब है दर्शाइए कि $AB = AC$

हल-



$\triangle ABD$ तथा $\triangle ACD$ में

$$\angle BAD = \angle CAD \quad (\text{दिया है})$$

$$AD = AD \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ \quad (\text{दिया है})$$

$$\text{अतः } \triangle ABC = \text{अतः } \triangle ACD \quad (\text{ASA नियम})$$

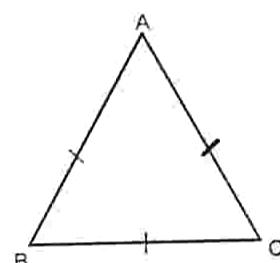
$$\text{इसलिए } AB = AC \quad (\text{CPCT})$$

इसी कारण $\triangle ABC$ समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्न 13. दर्शाइए कि समवाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।

हल- दिया है ABC एक समवाहु त्रिभुज है। जिसमें $AB = AC = BC$ है।

सिद्ध करना है- $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$



प्रमाण $AB = AC$ (दिया है)

$$\angle B = \angle C \quad (1) \quad (\text{बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण})$$

$$AB = BC \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle A = \angle C \quad (2) \quad (\text{बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण})$$

$$AC = BC \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle A = \angle B \quad (3) \quad (\text{बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण})$$

समीकरण (1), (2), और (3) से हमें प्राप्त होता है।

$$\angle A = \angle B + \angle C \quad \dots\dots(4)$$

त्रिभुज ABC में

$$\angle A = \angle B = \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$3\angle A = 180^\circ$$

$$\angle A = 60^\circ$$

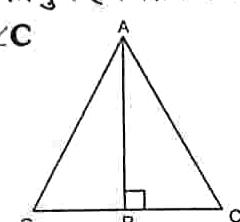
$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

लघु उत्तरीय प्रश्न (3 अंक)**प्रश्न 14. $\angle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है तो दर्शाइए कि $\angle B = \angle C$**

हल- दिया है: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ जिसमें

$AP \perp BC$ है।

प्रमाण: $\triangle ABP$ तथा $\triangle ACP$ में



$AB = AC$ (कर्ण दिया है)

$AP = AP$ (उभयन्ति भुजा)

$\angle APB = \angle APC$ (प्रत्येक $= 90^\circ$)

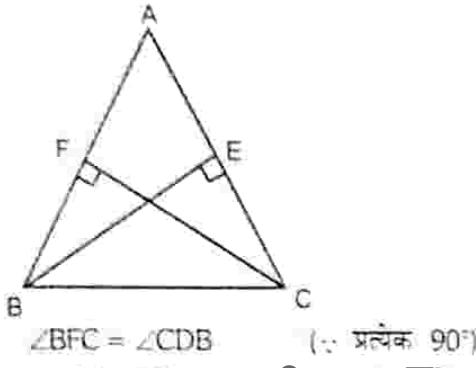
RHS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABP \cong \triangle ACP$

अतः $\angle B = \angle C$ By CPCT

प्रश्न 15. BE और CF एक त्रिभुज ABC के बराबर शीर्षतम्भ हैं। RHS सर्वांगसम नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल- $\triangle FBC$ और $\triangle ECB$ में



अतः $\triangle FBC \cong \triangle ECB$ (RHS सर्वांगसमता नियम)

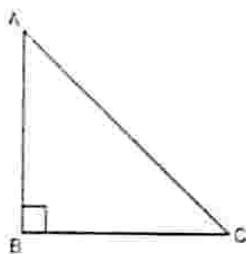
$\angle FBC = \angle ECB$

(सर्वांगसम त्रिभुज के समते भाग बराबर होते हैं)

$\triangle AFB$ में बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं अतः ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्न 16. दर्शाइए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है।

हल-



तब

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle C + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle C = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\angle A + \angle C < 90^\circ$$

चूंकि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

$$\angle B = \angle A + \angle C$$

तथा $\angle B > \angle A$ और $\angle B > \angle C$

इसलिए $AC > AB$

चूंकि त्रिभुज के बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है।

प्रश्न 17. ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle A = 90^\circ$ और $AB = AC$ है तो $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

हल- $\triangle ABC$ में

$$AB = AC$$

$$\angle B = \angle C$$

(चूंकि समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।)

$\triangle ABC$ में

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

(चूंकि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।)

$$90^\circ + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

हम जानते हैं कि $\angle B = \angle C$

$$90^\circ + \angle B + \angle B = 180^\circ$$

$$2\angle B = 180^\circ - 90^\circ$$

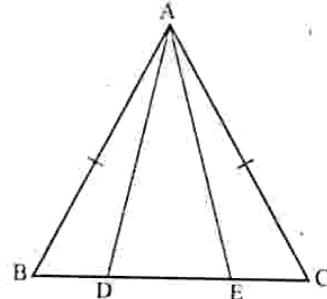
$$2\angle B = 90^\circ$$

$$\angle B = \frac{90^\circ}{2}$$

$$\text{लक्षित} \quad \angle B = \angle C = 45^\circ$$

प्रश्न 18. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC जिसमें $AB = AC$ है कि भुजा BC पर दो बिन्दु D और E इस प्रकार हैं कि $BE = CD$ तब दर्शाइए कि $AD = AE$

हल-



$\triangle ABD$ और $\triangle ACE$ में

$$AB = AC \quad (\text{दिया है}) \dots (1)$$

$$BD = EC \quad \dots (2)$$

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

साथ ही, $BE = CD$ (दिया है)

इसलिए $BE - DE = CD - DE$

अर्थात् $BD = CE$

$\dots (3)$

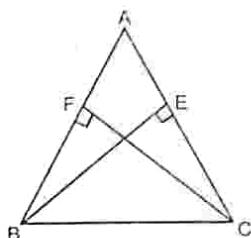
अतः $\triangle ABD = \triangle ACE$

(1),(2), (3) और SAS नियम द्वारा

इससे प्राप्त होता है: $AD = AE$ (CPCT)

प्रश्न 19. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें वरावर भुजाओं AC और AB पर क्रमशः शीर्ष लम्ब क्रमशः BE और CF खींचे गए हैं दर्शाइए कि शीर्ष लम्ब वरावर है।

हल-



ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें वरावर भुजाओं AC और AB पर क्रमशः शीर्षलम्ब BE और CF खींचे गए हैं। सिद्ध करना है-

$$BE = CF$$

चूंकि $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है,

अतः $AB = AC$

और $\angle ABC = \angle ACB$

(चूंकि समान भुजाओं के सम्मुख कोण वरावर होते हैं)

$\triangle BEC$ तथा $\triangle ACF$ में

$\angle BEC = \angle CFB$ (चूंकि मूल्यक समकाण है)

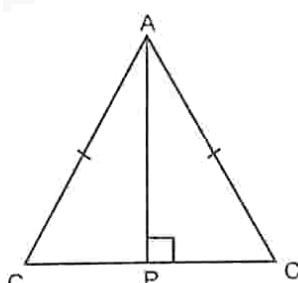
$BC = CB$ (उभयनिष्ठ)

$$\angle ECB = \angle FBC$$

अतः ASA सर्वांगसमता के आधार पर

प्रश्न 20. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है। $AP \perp BC$ खींचकर दर्शाइए कि $\angle B = \angle C$

हल- दिया है- ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है।



सिद्ध करना है- $\angle B = \angle C$

प्रमाण : $\triangle ABP$ और $\triangle ACP$ में

$$AB = AC$$

$$AP = AP$$

(कर्ण दिया है)

(उभयनिष्ठ भुजा)

$$\angle APB = \angle APC$$

RHS सर्वांगसम नियम से

$$\triangle ABP = \triangle ACP$$

अतः $\angle B = \angle C$

प्रश्न 21. ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle A = 90^\circ$ और $AB = AC$ तो $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

हल- $\triangle ABC$ में

$$AB = AC$$

$$\angle B = \angle C$$

(चूंकि समान भुजाओं के सम्मुख कोण वरावर होते हैं।)

$\triangle ABC$ में

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

(चूंकि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।)

$$90^\circ + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

हम जानते हैं कि $\angle B = \angle C$

$$90^\circ + \angle B + \angle B = 180^\circ$$

$$2\angle B = 180^\circ - 90^\circ$$

$$2\angle B = 90^\circ$$

$$\angle B = \frac{90^\circ}{2}$$

$$\angle B = 45^\circ$$

$$\text{अतः } \angle B = \angle C = 45^\circ$$

विश्लेषणात्मक प्रश्न (4 अंक)

प्रश्न 22. दर्शाइए कि किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।

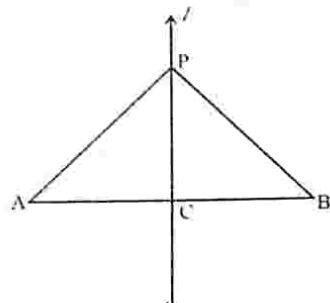
हल- देखिए अ.ल.उ. प्रश्न 13

प्रश्न 23. BE और CF एक त्रिभुज ABC के दो वरावर शीर्ष लम्ब हैं। RHS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल- देखिए ल.उ. प्रश्न 15

प्रश्न 24. AB एक रेखाखण्ड है और रेखा I इसका लम्ब समद्विभाजक है। यदि I पर स्थित P कोई बिन्दु है, तो दर्शाइए कि P बिन्दुओं A और B से समदूरस्थ है।

हल-



$/ \perp AB$ है और AB के मध्य चिन्ह C से होकर जाती है $\triangle PCA$ और $\triangle PCB$ में

$$AC = BC \quad (\text{C, } AB \text{ का मध्य चिन्ह है})$$

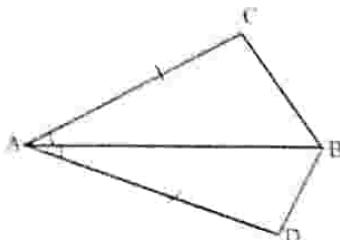
$$\angle PCA = \angle PCB = 90^\circ \quad (\text{दिया है})$$

$$PC = PC \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\text{अतः } \triangle PCA \cong \triangle PCB \quad (\text{SAS नियम})$$

इसलिए $PA = PB$ (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

प्रश्न 25. चतुर्भुज $ABCD$ में $AC = AD$ और AB कोण A को समद्विभाजित करता है तो दर्शाइए कि $\triangle ABC \cong \triangle ABD$



हल- दिया है : $AC = AD$ और AB कोण A को समद्विभाजित करता है।

सिद्ध करना है : $\triangle ABC \cong \triangle ABD$

प्रमाण : $\triangle ABC$ तथा $\triangle ABD$ में

$$\begin{aligned} AC &= AD && (\text{दिया है}) \\ \angle CAB &= \angle BAD && (\text{AB, } A \text{ को समद्विभाजित करता है}) \\ AB &= AB && (\text{उभयनिष्ठ है}) \end{aligned}$$

SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle ABC \cong \triangle ABD$$

$$BC = BD \quad (\text{CPCT})$$

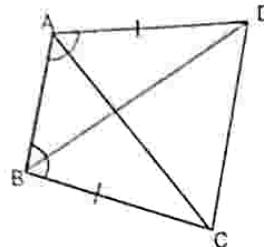
प्रश्न 26. $ABCD$ एक चतुर्भुज है जिसमें $AD = BC$ और $\angle DAB = \angle CBA$ तो सिद्ध कीजिए-

$$(1) \triangle ABD \cong \triangle BAC \quad (2) BD = AC$$

$$(3) \angle ABD = \angle BAC$$

हल- दिया है- $ABCD$ एक चतुर्भुज है

जिसमें $AD = BC$ और $\angle DAB = \angle CBA$ है



सिद्ध करना है-

$$(i) \triangle ABO \cong \triangle BAC$$

$$(ii) BD = AC$$

$$(iii) \angle ABD = \angle BAC$$

(1) $\triangle ABD$ तथा $\triangle BAC$ में

$$AD = BC \quad (\text{दिया है})$$

$$AB = AB \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\angle DAB = \angle CBA \quad (\text{दिया है})$$

अतः SAS सर्वांगसमता के आधार पर

$$\triangle ABD \cong \triangle BAC$$

(2) चब $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ [समी. (i) के आधार पर]

चब $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ (समी. (1) में सिद्ध किया)

$$\angle BAC \cong \angle OAE$$

8

अध्याय

चतुर्भुज

स्पर्णीय चिन्ह

1. **चतुर्भुज-** चार रेखा खंड AB , BC , CD और DA से घिरी एक समतल ब्रह्म आकृति चतुर्भुज कहलाती है। चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है।

2. **विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज-**

(i) **समांतर चतुर्भुज:** एक चतुर्भुज जिसमें विपरीत भुजाएँ समानांतर होती हैं, समानांतर चतुर्भुज कहलाता है और इसे समांतर चतुर्भुज के रूप में लिखा जाता है।

(ii) **आयत:** एक समांतर चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण 90° का होता है, आयत कहलाता है।

(iii) **वर्ग:** एक आयत जिसकी सभी भुजाएँ समान हों, वर्ग कहलाता है।

(iv) **समचतुर्भुज:** एक समांतर चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ समान हों, समचतुर्भुज कहलाता है।

(v) **समलम्ब चतुर्भुज:** वह चतुर्भुज जिसमें दो विपरीत भुजाएँ समानांतर हों और दो विपरीत भुजाएँ गैर-समानांतर हों, समलम्ब चतुर्भुज कहलाता है। यदि किसी समलम्ब चतुर्भुज की दो गैर-समानांतर भुजाएँ समान हों, तो इसे समद्विबाहु समलम्ब कहा जाता है।

(vi) **पतंग:** एक चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के दो जोड़े वरावर होते हैं, पतंग कहलाते हैं।

3. महत्वपूर्ण प्रमेय-

- एक चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है।
- समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण इसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
- एक चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है यदि- सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं। सम्मुख कोण बराबर होते हैं, विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
- एक चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है यदि- इसके सम्मुख कोण बराबर होते हैं। इसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं। इसके विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
- सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समानांतर होता है।
- एक आयत के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं और वे बराबर और इसके विपरीत होते हैं।
- एक समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और वे बराबर नहीं होते हैं और इसके विपरीत। एक वर्ग के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और वे बराबर और इसके विपरीत होते हैं। किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-विन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समांतर और इसके आगे के बराबर होता है। (मध्य-विन्दु प्रमेय)
- त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-विन्दु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को उसके मध्य-विन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। (मध्य-विन्दु प्रमेय के विलोम से)
- एक चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-विन्दुओं को क्रम से मिलाने से बनने वाला चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है।
- एक चतुर्भुज में, यदि विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, तो यह एक समांतर चतुर्भुज बनाता है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. बहुविकल्पीय प्रश्न-

1. वह चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ समान हों और कोण 90 अंश के बराबर हों, कहलाता है:

- | | |
|----------|---------------------|
| (अ) आयत | (ब) वर्ग |
| (स) पतंग | (द) समांतर चतुर्भुज |
2. एक चतुर्भुज के सभी कोणों का योग बराबर होता है:
- | | |
|-----------------|-----------------|
| (अ) 180° | (ब) 270° |
| (स) 360° | (द) 90° |

3. एक समलंब में होता है-

- | |
|--------------------------------------|
| (अ) सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर |
|--------------------------------------|

(ब) विपरीत पक्षों के दो जोड़े एक दूसरे के समानांतर

(स) इसकी सभी भुजाएँ समान हैं

(द) सभी कोण बराबर हैं

4. एक समचतुर्भुज एक हो सकता है:

- | | |
|--------------|-----------|
| (अ) चतुर्भुज | (ब) समलंब |
|--------------|-----------|

- | | |
|----------|----------|
| (स) पतंग | (द) वर्ग |
|----------|----------|

5. समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण इसे दो सर्वांगसम भागों में विभाजित करता है:

- | | |
|----------|--------------|
| (अ) वर्ग | (ब) चतुर्भुज |
|----------|--------------|

- | | |
|-------------|---------|
| (स) त्रिभुज | (द) आयत |
|-------------|---------|

6. एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण होते हैं:

- | | |
|-----------|-----------|
| (अ) बराबर | (ब) असमान |
|-----------|-----------|

- | |
|------------------------------------|
| (स) निर्धारित नहीं किया जा सकता है |
|------------------------------------|

- | |
|--------------------------|
| (द) इनमें से कोई भी नहीं |
|--------------------------|

7. समांतर चतुर्भुज के विकर्ण:

- | | |
|-----------|-----------|
| (अ) बराबर | (ब) असमान |
|-----------|-----------|

- | | |
|----------------------------------|---------------------|
| (स) एक दूसरे को समद्विभाजित करें | (द) कोई रिश्ता नहीं |
|----------------------------------|---------------------|

8. आयत का प्रत्येक कोण है:

- | | |
|------------------------|----------------------|
| (अ) 90° से अधिक | (ब) 90° से कम |
|------------------------|----------------------|

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| (स) 90° के बराबर | (द) 45° के बराबर |
|-------------------------|-------------------------|

9. एक चतुर्भुज के कोण $4:5:10:11$ के अनुपात में हैं। कोण हैं

- | | |
|---|--|
| (अ) $360^\circ, 60^\circ, 108^\circ, 156^\circ$ | (ब) $48^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 132^\circ$ |
|---|--|

- | | |
|--|--|
| (स) $52^\circ, 60^\circ, 122^\circ, 126^\circ$ | (द) $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$ |
|--|--|

10. यदि $ABCD$ एक समलम्ब है जिसमें $AB \parallel CD$ और $AD = BC$, तो:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (अ) $\angle A = \angle B$ | (ब) $\angle A < \angle B$ |
|---------------------------|---------------------------|

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (स) $\angle A < \angle B$ | (द) इनमें से कोई भी नहीं। |
|---------------------------|---------------------------|

11. समांतर चतुर्भुज के लिए निम्नलिखित में से कौन सा सत्य नहीं है?

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| (अ) विपरीत पक्ष बराबर हैं | (ब) विपरीत कोण बराबर हैं |
|---------------------------|--------------------------|

- | |
|--|
| (स) विपरीत कोणों को विकर्णों द्वारा विभाजित किया जाता है |
|--|

- | |
|--|
| (द) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। |
|--|

12. एक चतुर्भुज के तीन कोण $75^\circ, 90^\circ$ और 75° हैं। चौथा कोण है।

- | | |
|----------------|-----------------|
| (अ) 90° | (ब) 105° |
|----------------|-----------------|

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (स) 105° | (द) 120° |
|-----------------|-----------------|

13. $ABCD$ एक समचतुर्भुज इस प्रकार है कि $ACB = 40^\circ$ है। तब ADB है।

- | | |
|----------------|----------------|
| (अ) 40° | (ब) 45° |
|----------------|----------------|

- | | |
|----------------|----------------|
| (स) 50° | (द) 60° |
|----------------|----------------|

- 14.** एक चतुर्भुज PQRS की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को क्रम से मिलाने पर बनने वाला चतुर्भुज एक समचतुर्भुज होता है, यदि
- (अ) PQRS एक समचतुर्भुज है
 - (ब) PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है
 - (स) PQRS के विकर्ण सम्बद्ध हैं
 - (द) PQRS के विकर्ण बराबर हैं
- 15.** एक आयत का एक विकर्ण आयत के एक तरफ 25° पर छुका हुआ है। विकर्णों के बीच का न्यून कोण है
- (अ) 25°
 - (ब) 40°
 - (स) 50°
 - (द) 55°
- 16.** यदि चतुर्भुज ABCD के कोण A, B, C और D को क्रम से लिया गया है, तो उनका अनुपात $3:7:6:4$ है, तो ABCD एक है-
- (अ) एक परतग
 - (ब) समचतुर्भुज
 - (स) समान्तर चतुर्भुज
 - (द) समलम्ब चतुर्भुज
- 17.** एक चतुर्भुज PQRS की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को क्रम से मिलाने पर बनने वाला चतुर्भुज एक आयत है, यदि
- (अ) PQRS एक आयत है
 - (ब) PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है
 - (स) PQRS के विकर्ण सम्बद्ध हैं
 - (द) PQRS के विकर्ण सम्भाजित हैं
- 18.** एक समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को क्रम से मिलाने पर जो आकृति प्राप्त होती है, वह है:
- (अ) एक वर्ग
 - (ब) एक समचतुर्भुज
 - (स) एक आयताकार
 - (द) कोई समान्तर चतुर्भुज
- 19.** यदि APB और CQD दो समानांतर रेखाएँ हैं, तो कोणों के द्विभाजक APQ, BPQ, CQP और PQD बनते हैं-
- (अ) एक वर्ग
 - (ब) आयत
 - (स) समचतुर्भुज
 - (द) कोई अन्य समान्तर चतुर्भुज
- 20.** निम्नलिखित में से कौन एक चतुर्भुज नहीं है?
- (अ) एक पत्तग
 - (ब) वर्ग
 - (स) त्रिभुज
 - (द) समचतुर्भुज
- 21.** किसी चतुर्भुज के चारों कोणों का योग होता है।
- (अ) 180°
 - (ब) 360°
 - (स) 90°
 - (द) 270°
- 22.** यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हो तो वह होगा।
- (अ) आयत
 - (ब) वर्ग
 - (स) समलम्ब चतुर्भुज
 - (द) समचतुर्भुज
- 23.** यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हो और परस्पर लंबवत् समद्विभाजित करें वह होता है।

- (अ) एक आयत
- (ब) एक वर्ग
- (स) एक समलम्ब चतुर्भुज
- (द) इनमें से कोई नहीं

24. वर्ग एक आयत है और

- (अ) एक समान्तर चतुर्भुज भी
 - (ब) एक समचतुर्भुज भी
 - (स) एक त्रिभुज भी
 - (द) एक समलम्ब चतुर्भुज भी
- उत्तर- (1) ब (2) स (3) अ (4) द (5) स (6) अ (7) स (8) स (9) ब (10) अ (11) स (12) द (13) स (14) द (15) स (16) द (17) स (18) स (19) ब (20) स (21) ब (22) अ (23) ब (24) ब

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

1. एक समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएं होती हैं।
 2. यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें, तो वह एक होता है।
 3. आयत का प्रत्येक कोण एक होता है।
 4. एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर होते हैं।
 5. एक समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को (परस्पर) करते हैं।
- उत्तर- (1) बराबर (2) समान्तर चतुर्भुज (3) समकोण (4) लम्ब (5) समद्विभाजित

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

1. एक समान्तर चतुर्भुज एक वर्ग होता है।
2. एक वर्ग समान्तर चतुर्भुज है और एक समचतुर्भुज भी
3. आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं।
4. वर्ग के विकर्ण परस्पर समकोण पर न तो समद्विभाजित करते हैं और न बराबर होते हैं।
5. समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

उत्तर- (1) असत्य (2) सत्य (3) सत्य (4) असत्य (5) सत्य

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए-

1. किसी समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे कितने सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
2. यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो तो उसे क्या कहेंगे?
3. एक समान्तर चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजक व्या वनात हैं?
4. यदि एक चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो तो उसे क्या कहेंगे?

उत्तर- (1) 2 (दो) (3) समान्तर चतुर्भुज (3) एक आयत (4) समान्तर चतुर्भुज।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. चतुर्भुज के कोण $3 : 5 : 9 : 13$ के अनुपात में हैं।

चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल- माना ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ चार कोण हैं।

$$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D = 3 : 5 : 9 : 13$$

$$\text{अनुपातों का योग} = 3 + 5 + 9 + 13 = 30$$

हम जानते हैं कि चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है।

$$\text{अतः } \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

$$\angle A = \frac{3}{30} \times 360^\circ = 36^\circ$$

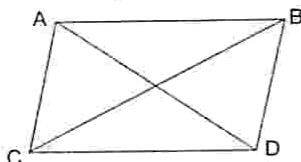
$$\angle B = \frac{5}{30} \times 360^\circ = 60^\circ$$

$$\angle C = \frac{9}{30} \times 360^\circ = 108^\circ = 9 \times 12 = 108^\circ$$

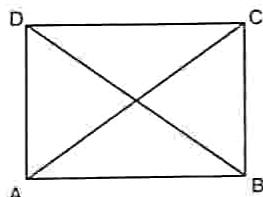
$$\angle D = \frac{13}{30} \times 360^\circ = 156^\circ = 13 \times 12 = 156^\circ$$

अतः चतुर्भुज के सभी कोण हैं- $\angle A = 36^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 108^\circ$ तथा $\angle D = 156^\circ$

प्रश्न 2. यदि किसी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो दर्शाइए कि वह एक आयत है।



हल- दिया है- ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें $AC = BD$



सिद्ध करना है- समांतर चतुर्भुज एक आयत है।

प्रमाण- $\triangle ACB$ और $\triangle BDA$ में

$$AC = BD \text{ (दिया है)}$$

$$AB = BA \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$AD = BC \text{ (चूंकि समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं)}$$

अतः SSS सर्वांगसमता के आधार पर

$$\triangle ACB \cong \triangle BDA$$

अतः $\angle A = \angle B$

(CPCT)(1)

चूंकि AB एक तिर्यक रेखा है,

इसलिए $AD \parallel BC$

चूंकि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों का योग 180° होता है।

अतः $\angle BAD = \angle ABC = 180^\circ$

....(2)

समी. (1) और (2) से

$$\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$$

$$\angle A = 90^\circ, \angle B = 90^\circ$$

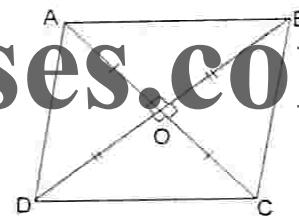
चूंकि समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

अतः $\angle C = \angle A$ तथा $\angle D = \angle B$

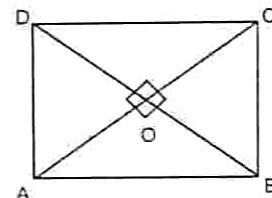
इसलिए $\angle C = \angle A = 90^\circ$ तथा $\angle D = \angle B = 90^\circ$

अतः इसका प्रत्येक कोण 90° है। इसलिए समांतर चतुर्भुज ABCD एक आयत है।

प्रश्न 3. दर्शाइए कि यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं, तो वह समचतुर्भुज होता है।



हल- दिया है- ABCD एक चतुर्भुज है, जिसके विकर्ण AC तथा BD परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।



सिद्ध करना है- चतुर्भुज ABCD एक समचतुर्भुज होता है।

प्रमाण- $\triangle AOB$ तथा $\triangle AOD$ में

$$AO = OA \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$OB = OD \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle AOB = \angle AOD \quad (\text{प्रत्येक समकोण है})$$

SAS सर्वांगसमता के आधार पर

$$\triangle AOB \cong \triangle AOD$$

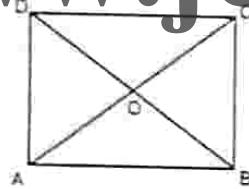
अतः $AB = AD$

.....(1) (CPCT)

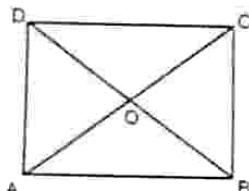
इसी प्रकार $\triangle AOB$ तथा $\triangle AOC$ में

$OA = OA$	(उभयनिष्ठ)	$AC = BD$	(CPCT)
$OA = OC$	(दिया है)	$\Delta AOD \text{ तथा } \Delta OCB \text{ में}$	
$\angle AOB = \angle BOC$	(प्रत्येक समकोण है)	$AD = CD$ (चौंक वर्ग की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं)	
SAS सर्वांगसमता से $\Delta AOB \cong \Delta AOC$		$\angle AOD = \angle OCB$	
अतः $AB = BC$		(चौंक $AD \parallel BC$ और तिर्यक AC इन्हें काटती है)	
ΔBOC तथा ΔCOD में		इसी प्रकार $\angle ODA = \angle OBC$	
$OC = OC$	(उभयनिष्ठ)	चौंक $AD \parallel BC$ और तिर्यक BD इन्हें काटती है।	
$OB = OD$	(दिया है)	ASA सर्वांगसमता से	
$\angle BOC = \angle COD$ (प्रत्येक समकोण है)		$\Delta OAD \cong \Delta OCD$	
SAS सर्वांगसमता से, $\Delta BOC \cong \Delta COD$		अतः $OA = OC$	(CPCT)(1)
अतः $BC = CD$		इसी प्रकार $OB = OD$(2)
ΔCOD तथा ΔAOD में		समी. (1) और (2) से	
$OD = OD$	(उभयनिष्ठ)	AC और BD परस्पर समद्विभाजित करते हैं।	
$OA = OC$	(दिया है)	पुनः ΔOBA तथा ΔODP में	
$\angle COD = \angle AOD$ (प्रत्येक समकोण है)		$OB = OD$ समी. (2) से	
SAS सर्वांगसमता से $\Delta COD \cong \Delta AOD$		$BA = DA$ (वर्ग की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं)	
अतः $CD = AD$		$OA = OB$ (उभयनिष्ठ)	
समी. (1), (2), (3) तथा (4) से		प्रश्न 5. दर्शाइए कि यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों और एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करें, तो वह वर्ग होता है।	
$AB = BC = CD = AD$			
अतः समानांतर चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर हैं, अतः यह एक समचतुर्भुज है।			

प्रश्न 4. दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।



हल- दिया है- ABCD एक वर्ग है।

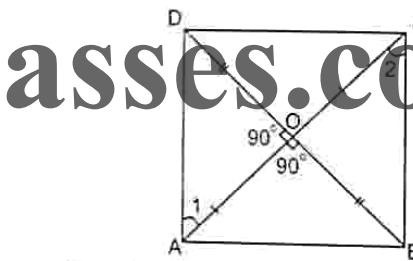


सिद्ध करना है- वर्ग के विकर्ण $AC = BD$ हैं और ये विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

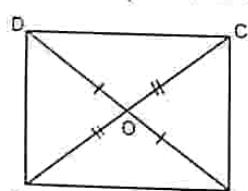
प्रमाण- (1) ΔABC तथा ΔBAD में

$$\begin{aligned} AB &= BA && (\text{उभयनिष्ठ}) \\ BC &= AD && (\text{वर्ग की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं}) \\ \angle ABC &= \angle BAD && (\text{प्रत्येक समकोण है}) \end{aligned}$$

SAS सर्वांगसमता नियम से
 $\Delta ABC \cong \Delta BAD$



हल- दिया है- एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बराबर तथा एक-दूसरे को परस्पर लंबवत् समद्विभाजित करते हैं।



सिद्ध करना है- चतुर्भुज एक वर्ग होता है।

प्रमाण- ΔAOD और ΔOCB में

$$\begin{aligned} OD &= OC && (\text{दिया है}) \\ OD &= OB && (\text{दिया है}) \\ \angle AOD &= \angle BOC && (\text{शीर्षभिमुख कोण}) \\ \text{SAS सर्वांगसमता से} \\ \Delta AOD &\cong \Delta OCD \\ \text{अतः } AD &= CB && (\text{CPCT}) \end{aligned}$$

$$\angle ODA = \angle OBC \quad (\text{CPCT})$$

तथा $AD \parallel BC$

और $AD = BC$

इसलिए चतुर्भुज ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

अब $\triangle AOB$ तथा $\triangle AOD$ में

$$OA = OA \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$OB = OD \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle AOB = \angle AOD \quad (\text{प्रत्येक समकोण है})$$

SAS सर्वांगसमता से

$$\triangle AOB \cong \triangle AOD$$

और $AB = AD$

अतः चतुर्भुज ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

अब $\triangle ABC$ तथा $\triangle BAD$ में

$$AC = BD \quad (\text{दिया है})$$

$$BC = AD \quad (\text{चूंकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है})$$

$$AB = BA \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

SSS, सर्वांगसमता से

$$\triangle ABC \cong \triangle BAD$$

तथा $\angle ABC = \angle BAD \quad (\text{CPCT})$

चूंकि $AD \parallel BC$

क्योंकि तथा समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ हैं तथा तिर्यक रेखा AB इन्हें काटती है।

इसलिए $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$

क्योंकि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के क्रमागत अंतः कोणों का योग 180° होता है।

अतः $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$

इसी प्रकार $\triangle ABCD$ तथा $\triangle CDA$ में

$$BD = CA \quad (\text{दिया है})$$

$$AB = DC \quad (\because \text{ABCD एक समांतर चतुर्भुज है})$$

$$CD = CD \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

SSS, सर्वांगसमता से $\triangle ABCD \cong \triangle CDA$

और $\triangle ABCD = \triangle CDA \quad (\text{CPCT})$

तथा $AD = BC$

क्योंकि ये समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाएँ हैं और तिर्यक AC इन्हें काटती है।

इसलिए $\angle BCD + \angle CDA = 180^\circ$

या $\angle BCD = \angle CDA = 90^\circ$

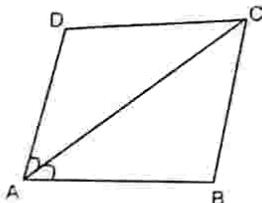
चूंकि समांतर चतुर्भुज ABCD के प्रत्येक कोण समकोण है।

अतः ABCD एक वर्ग है।

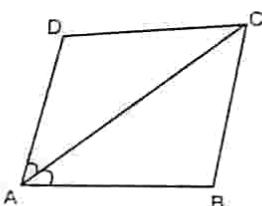
प्रश्न 6. एक समांतर चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि

(i) यह C को भी समद्विभाजित करता है,

(ii) ABCD एक समचतुर्भुज है।



हल- दिया है- समांतर चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC को A को समद्विभाजित करता है।



सिद्ध करना है-

(1) यह $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।

(2) ABCD एक समचतुर्भुज है।

प्रमाण- (1) $\triangle ADC$ तथा $\triangle CBA$ में

$AD = CB$ (यह समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ हैं)

$AC = DA$ (उभयनिष्ठ)

$DC = BA$ (समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाएँ हैं)

SSS, सर्वांगसमता से

$\triangle ADC \cong \triangle CBA$

और $\angle ACD = \angle CAB \quad (\text{CPCT})$

तथा $\angle DAC = \angle BCA \quad (\text{CPCT})$

$\angle CAB = \angle CAD \quad (\text{दिया है})$

अतः $\angle ACD = \angle BCA$

इस प्रकार AC, $\angle C$ को समद्विभाजित करता है

(2) हम जानते हैं कि $\angle ACD = \angle CAD$

तथा $AD = CD$

चूंकि समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

अतः $AB = BC = CD = DA$

चूंकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

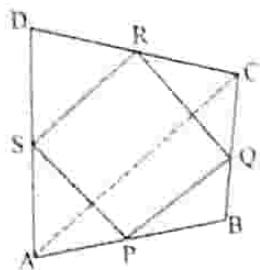
अतः ABCD एक समचतुर्भुज है।

प्रश्न 7. ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु हैं (देखिए आकृति)। AC एक विकर्ण है। दर्शाइए

(i) $SR \parallel AC$ और $SR = 12 AC$

(ii) $PQ = SR$

(iii) PQRS एक समानंतर चतुर्भुज है।



हल- देखिए, अलग तरीके से प्रश्न 3

प्रश्न 8. ABCD एक आयत है और P, Q, R उत्तर S क्रमशः AB, BC, CD और DA भुजाओं के मध्य-बिन्दु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक समचतुर्भुज है।

हल- प्रमाणण- $\triangle ABC$ में

P, A, B का तथा Q, B, C का मध्य बिन्दु हैं।

अतः $PQ \parallel AC$ और $PQ = \frac{1}{2}AC$ (1)

इसी तरह $\triangle ADC$ में

R, D, C का तथा S, D, A का मध्य बिन्दु हैं।

अतः $SR \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2}AC$ (2)

समी. (1) और (2) से

$PQ \parallel SR$ और $PQ = SR$

अतः चतुर्भुज PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।(3)

आयत ABCD में

$AD = BC$ (समांतर भुजाएँ)

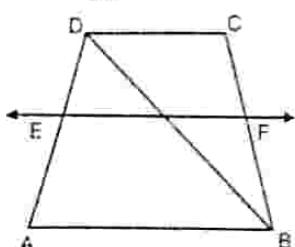
$$\frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$$

$$\therefore AS = BQ$$

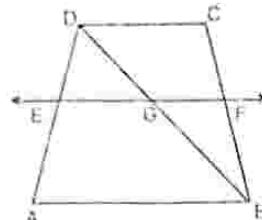
अब \triangleAPS तथा \triangleBPQ में

$AP = BP$ (चौकिं प. AB का मध्य बिन्दु है)

प्रश्न 9. ABCD एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$, BD एक विकर्ण है और E, AD का मध्य-बिन्दु है। E से होकर AB के समांतर एक रेखा खींची जाती है जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि F, BC का मध्य-बिन्दु है।



हल- दिया है- ABCD एक समलंब है, जिसमें $AB \parallel CD$ है। साथ ही BD एक विकर्ण है और E भुजा AD का मध्यविन्दु है। E से होकर एक रेखा AB के समांतर खींची गई है, जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है।



सिद्ध करना है- F भुजा BC का मध्य बिन्दु है।

प्रमाणण- माना कि DB एक रेखा है जो रेखा EF को G पर काटती है।

$\triangle DAB$ में, E, DA का मध्य बिन्दु है अतः $EG \parallel AB$ और G, DB का मध्य बिन्दु है।

(मध्य बिन्दु प्रमेय के विलोम से)

अब $\triangle BDC$ में

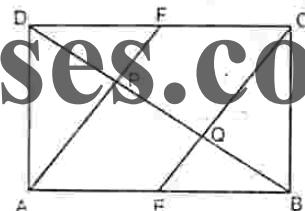
F, BC का मध्य बिन्दु है तथा

G, DB का मध्य बिन्दु है, और $GF \parallel AB \parallel DC$

(मध्य बिन्दु प्रमेय के विलोम से)

प्रश्न 10. एक समांतर चतुर्भुज ABCD में, E और F

क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य-बिन्दु हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि रेखाखंड AF और EC विकर्ण BD को समान्तर भाजित करते हैं।



हल- सिद्ध करना है- रेखाखंड AF और EC विकर्ण BD को समान्तर भाजित करते हैं।

प्रमाणण- $AB \parallel DC$

(चौकिं ये समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ हैं)

$$AE \parallel FC \quad \dots\dots(1)$$

तथा $AB = DC$

(समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ वरावर होती हैं)

$$\text{और } \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DC$$

$$\text{तथा } AE = CF \quad \dots\dots(2)$$

समी. (1) और (2) से

$AECF$ एक समांतर चतुर्भुज है।

चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है, यदि सम्मुख भुजाएँ वरावर और समांतर होती हैं।

$$\text{अतः } EC \parallel AF \quad \dots\dots(3)$$

(ये समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ हैं)

$\triangle ABC$ में

F, DC का मध्य बिन्दु है अतः

$$FP \parallel CQ$$

तथा मध्य बिन्दु प्रमेय के विलोम से P, DQ का मध्य बिन्दु है,

अतः

$$DP = PQ \quad \dots(4)$$

इस प्रकार $\triangle BAP$ में

$$BQ = PQ \quad \dots(5)$$

समी. (4) और (5) में

$$DP = BQ = PQ$$

अतः रेखाखंड AF और EC विकर्ण BD को समत्रिभाजित करते हैं।

प्रश्न 11. ABC एक त्रिभुज है जो C पर समकोण है। कर्ण AB के मध्य-बिन्दु M से होकर BC के समांतर एक रेखा AC को D पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि

(i) D, AC का मध्य-बिन्दु है

(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$

हल- (2) $MD \perp AC$ है (3) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$ है।

प्रमाण- $\triangle ACB$ में

M, AB का मध्य बिन्दु है और $MD \parallel BC$

D, AC का मध्य बिन्दु है। मध्य बिन्दु त्रिये के विलोम से

(2) चूंकि $MD \parallel BC$ और तिर्यक रेखा AC इन्हें काटती है

अतः $\angle ADM = \angle ACB$ (संगत कोण)

परन्तु दिया है $\angle ACB = 90^\circ$

अतः $\angle ADM = 90^\circ$

अतः $MD \perp AC$

(3) हम जानते हैं रेखिक युग्म अभिगृहीत से

$$\angle ADM + \angle CDM = 180^\circ$$

तथा $\angle ADM = \angle CDM = 90^\circ$

अब $\triangle ADM$ और $\triangle CDM$ में

$AD = CD$ (चूंकि D, AC का मध्य बिन्दु है)

$\angle ADM = \angle CDM$ (प्रत्येक समकोण है)

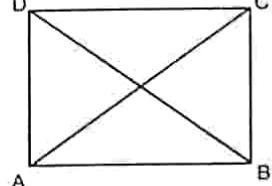
$DM = DM$ (उभयनिष्ठ)

SAS सर्वांगसमता से

प्रश्न 12. यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो दर्शाइए कि वह आयत है।

हल- दिया है- ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसमें

$$AC = BD$$



सिद्ध करना है- समान्तर चतुर्भुज एक आयत है।

प्रमाण- $\triangle ACB$ और $\triangle BDA$ में

$$AC = BD \text{ (दिया है)}$$

$$AB = BA \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$AD = BC$ (चूंकि समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं)

अतः SSS सर्वांगसमता के आधार पर

$$\triangle ACB \cong \triangle BDA$$

अतः $\angle ABC = \angle BAD \quad (\text{CPCT}) \dots(1)$

चूंकि AB एक तिर्यक रेखा है,

$$\text{इसलिए } AD \parallel BC$$

चूंकि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों का योग 180° होता है।

अतः $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ \dots(2)$

समी. (1) और (2) से

$$\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$$

$$\angle A = 90^\circ, \angle B = 90^\circ$$

चूंकि समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

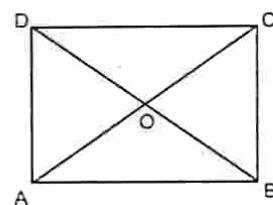
अतः $\angle C = \angle A$ तथा $\angle B = \angle D$

इसलिए $\angle C = \angle A = 90^\circ$ तथा $\angle D = \angle B = 90^\circ$

अतः इसका प्रत्येक कोण 90° है। इसलिए समान्तर चतुर्भुज ABCD एक आयत है।

प्रश्न 13. दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

हल- दिया है- ABCD एक वर्ग है।



(2) $\triangle AOD$ तथा $\triangle OCB$ में

$AD = CD$ (चूंकि वर्ग की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं)

$$\angle OAD = \angle OCB$$

(चूंकि $AD \parallel BC$ और तिर्यक AC इन्हें काटती है)

इसी प्रकार $\angle ODA = \angle OBC$

चूंकि $AD \parallel BC$ और तिर्यक BD इन्हें काटती है।

ASA सर्वांगसमता से

$$\triangle AOD \cong \triangle OCB$$

अतः $OA = OC$

इसी प्रकार $OB = OD$

समी. (1) और (2) से

(CPCT)(1)

.....(2)

$AC = BD$ परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

यदि $\angle AOB = \angle COD$ में

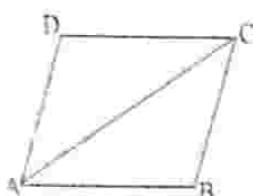
$OB = OD$ मध्ये (2) में

$BA = DA$ (जो की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं)

$OA = OC$ (उभयनिष्ठ)

प्रश्न 14. मिछ कीजिए यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक समान्तर चतुर्भुज होता है।

हल-



$\triangle ABC$ और $\triangle CDA$ में

$AB = CD, BC = AD$ (दिया है)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ)

स्वयं $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (SSS नियम)

अतः $\angle BAC = \angle DCA$ (एकात्र कोणों का युग्म)

और $\angle BCA = \angle DAC$ (एकात्र कोणों का युग्म)

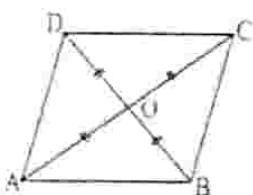
$AB \parallel DC$ और $AD \parallel BC$ हैं।

चतुर्भुज की समान्तर चतुर्भुज है।

अतः $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

प्रश्न 15. मिछ कीजिए यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें, तो वह एक समान्तर चतुर्भुज होता है।

हल-



$\triangle AOB$ और $\triangle COD$ में

$OA = OC, OB = OD$ (दिया है)

$\angle AOB = \angle COD$ (शार्पीभुख कोण)

$\triangle AOB \cong \triangle COD$ (SAS नियम)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ)

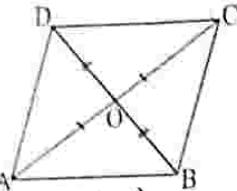
$\angle OAB = \angle OCD$ तथा $AB = CD$ स्वयंसमता से

अतः $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

(यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर एवं समान्तर हो तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।)

प्रश्न 16. दर्शाइए यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करें, तो वह एक समचतुर्भुज होता है।

हल-



दिया है- $ABCD$ एक चतुर्भुज है।

जिसके विकर्ण AC तथा BD एक-दूसरे को विन्दु O पर

समकोण पर समद्विभाजित करते हैं ($\angle COD = 90^\circ$ है)

और $AO = CO$ तथा $BO = DO$ हैं।

सिद्ध करना है- $ABCD$ एक आयत है।

प्रमाण- $\triangle AOB$ तथा $\triangle COD$ में

$AO = CO$ (दिया है)

$BO = DO$ (दिया है)

$\angle AOB = \angle COD$ (शार्पीभुख कोण)

अतः SAS स्वयंसमता नियम से

$\triangle AOB \cong \triangle COD$.

$AB = CD$ (By CPCT) ... (1)

तथा $\angle BAO = \angle COD$ (एकात्र कोण) (By CPCT)

$AB = CD$ (2) (एकात्र कोण बराबर हो से रखाएँ समाप्त होती हैं)

समा. (1) तथा (2) से

$ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

(यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर एवं समान्तर हो तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।)

$AD = BC$... (3)

(समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुज बराबर होती है)

अब $\triangle AOD$ तथा $\triangle COD$ में

$AO = CO$ (दिया है)

$DO = DO$ (उभयनिष्ठ)

$\angle AOD = \angle COD (90^\circ$ प्रत्येक)

अतः SAS स्वयंसमता नियम से

$\triangle AOD \cong \triangle COD$

$AD = CD$ (By CPCT) ... (4)

समा. (1), (3) तथा (4) से हम पाते हैं

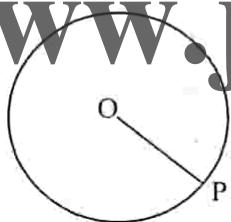
$AB = BC = CD = AD$

अतः $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

स्मरणीय बिंदु

- बच्चों आपने घड़ी में देखा होगा कि सेकण्ड की मुड़ घड़ी के डायल के पर जल्दी-जल्दी चक्कर लगाती है तथा दूसरा एक सिरा एक गोल पथ में चलता है। सेकण्ड की मुड़ के सिरे से बनता हुआ पथ एक वृत्त (Circle) कहलाता है। अर्थात् एक तल पर उन सभी विन्दुओं का समूह, जो तल के एक स्थिर विन्दु से एक स्थिर दूरी पर स्थित हो, एक वृत्त कहलाता है।
- वृत्त का केन्द्र-** स्थिर विन्दु को वृत्त का केन्द्र (Centre of the Circle) कहते हैं।
- वृत्त की त्रिज्या-** “स्थिर विन्दु (केन्द्र) से गतिमान विन्दु को नियत दूरी वृत्त की त्रिज्या (Radius of the Circle) कहलाती है।
- ज्ञातव्य:** केन्द्र O और त्रिज्या r वाले वृत्त को C (O, r) से प्रकट करते हैं। O वृत्त का केन्द्र तथा लम्बाई OP वृत्त की त्रिज्या है।

www.jcdclasses.com



- एक वृत्त उस तल को जिस पर वह स्थित है उसे तीन भागों में विभाजित करता है।
 - वृत्त के अन्दर का भाग जिसे अभ्यंतर (Interior) कहते हैं।
 - वृत्त एवं वृत्त के बाहर का भाग, जिसे बहिर्भाग (Exterior) कहते हैं।
 - वृत्त तथा दूसरा अभ्यंतर मिलकर वृत्तीय क्षेत्र (Circular region) बनाते हैं।

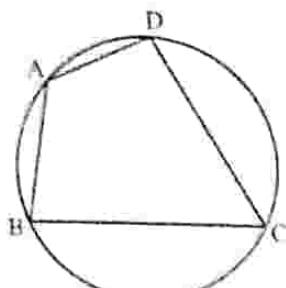


- केन्द्रीय वृत्त-** “एक ही केन्द्र वाले वृत्त को केन्द्रीय वृत्त (Concentric Circles) कहते हैं।”

- वृत्त की चाप-** “वृत्त के एक सतत भाग को वृत्त की चाप कहा जाता है।”
- वृत्त की जीवा-** “वृत्त में दो विन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड को वृत्त की जीवा (Chord of the Circle) कहते हैं।”
- वृत्त का व्यास-** “वृत्त के केन्द्र से जाने वाली जीवा को वृत्त का व्यास कहा जाता है।”
- ज्ञातव्य:** (i) व्यास वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है।
(ii) व्यास $d = 2 \times$ त्रिज्या $r = 2r$
- वृत्त का खण्ड-** “यदि PQ वृत्त (O, r) की जीवा है तो जीवा वृत्त से घिरे क्षेत्र को दो भागों में विभाजित करती हैं प्रत्येक भाग को वृत्त खण्ड (Segment of Circle) कहते हैं।”
- लघुवृत्त खण्ड (Minor Segment of the Circle)-** “अर्धवृत्त से छोटी अवधा को लघु वृत्त खण्ड (Minor Segment) कहते हैं।”

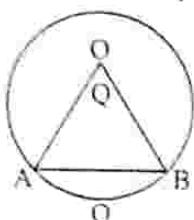


- दीर्घवृत्त खण्ड-** “अर्धवृत्त से बड़ी अवधा को दीर्घ वृत्त खण्ड (Semi Circle) कहते हैं।”
- अर्द्धवृत्त:-** “वृत्त की व्यास जीवा वृत्त के क्षेत्र को दो वरावर भागों में विभाजित करती है। प्रत्येक भाग अर्द्धवृत्त खण्ड (Semi Circle) कहलाता है।”
- वृत्त का केन्द्रीय कोण:-** “वह कोण जिसका शीर्ष वृत्त का केन्द्र O है, वृत्त का केन्द्रीय कोण (Central Angle of the Circle) कहलाता है।”
- वृत्त की परिधि:-** “वृत्त के पूरे चाप को वृत्त की परिधि कहते हैं।” अर्थात् “किसी वृत्त की परिमाप उस वृत्त की परिधि कहलाती है।”
- चक्रीय चतुर्भुज:-** जब किसी चतुर्भुज के चारों शीर्ष वृत्त पर स्थित हो तो उस चतुर्भुज को चक्रीय चतुर्भुज कहते हैं।”
- चक्रीय चतुर्भुज के गुण:-** “चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं।”



- “अर्द्धवृत्त का कोण समकोण होता है।”
- वृत्त की चाप, चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण और वृत्त की त्रिज्या में सम्बन्ध:

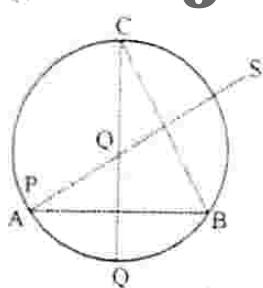
$$\text{चाप } \widehat{APB} \text{ का लम्बाई} = r \times q$$



जहाँ r = वृत्त की त्रिज्या तथा Q , चाप \widehat{APB} द्वारा वृत्त के केन्द्र O पर बना कोण अर्थात् $\angle AOB = AOB = QQ$

$$\text{अतः कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

- तीन असरखे बिन्दुओं से होकर एक और तीव्र एक वृत्त खोचा जाता है।



- किसी चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण उसी चाप द्वारा शेष परिधि पर बने कोण का दो गुना होता है। $mPQ = 2\angle PRQ$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्न-

- तीन असरखे बिन्दुओं से होकर अधिकतम वृत्त खोचे जा सकते हैं-

- | | |
|-------|----------|
| (अ) 1 | (ब) 2 |
| (स) 3 | (द) अनेक |

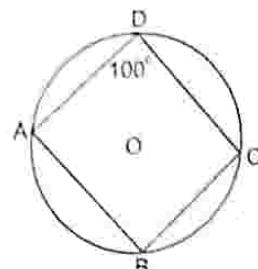
- अर्द्धवृत्त पर बना कोण होता है-

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (अ) 180° | (ब) 45° |
| (स) 90° | (द) 270° |

- किसी चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग होता है-

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (अ) 360° | (ब) 180° |
| (स) 90° | (द) 60° |

- पार्श्व चित्र में $\angle B$ का मान है-



- | | |
|----------------|----------------|
| (अ) 10° | (ब) 50° |
| (स) 70° | (द) 80° |

- 5 CM त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र से 3 CM की दूरी पर स्थित जीवा लम्बाई होगी।

- | | |
|-----------|----------|
| (अ) 10 CM | (ब) 6 CM |
| (स) 4 CM | (द) 8 CM |

- ABCD एक ऐसा चक्रीय चतुर्भुज है कि AB चतुर्भुज के परिगत वृत्त का एक व्यास है तथा $\angle ADC = 140^\circ$ है तब $\angle BAC$ बराबर है-

- | | |
|----------------|----------------|
| (अ) 50° | (ब) 40° |
| (स) 80° | (द) 30° |

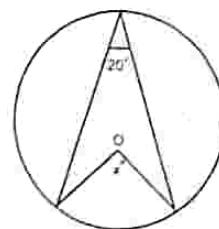
- यदि $AB = 12 \text{ CM}$ $BC = 16 \text{ CM}$ और AB रेखाखण्ड BC पर लंब है तो AB और C से होकर जाने वाली वृत्त की त्रिज्या है-

- | | |
|----------|-----------|
| (अ) 6 CM | (ब) 10 CM |
| (स) 8 CM | (द) 12 CM |

- किसी वृत्त का AD एक व्यास है और AB एक जीवा है यदि $AD = 34 \text{ CM}$ $AB = 30 \text{ CM}$ तो वृत्त के केन्द्र AB की दूरी है-

- | | |
|-----------|-----------|
| (अ) 17 CM | (ब) 15 CM |
| (स) 4 CM | (द) 8 CM |

- दी गई आकृति में x द्वारा अंकित कोण का मान ज्ञात कीजिये।



- | | |
|----------------|-----------------|
| (अ) 20° | (ब) 80° |
| (स) 40° | (द) 100° |

10. यदि दो वृत्तों की त्रिज्या बराबर हो तो वृत्त आपस में होते हैं-

- | | |
|-----------|-----------------------|
| (अ) बराबर | (ब) सर्वानुसम |
| (स) समरूप | (द) इनमें से कोई नहीं |

11. एक वृत्त का व्यास 8 सेमी. है तो वृत्त की त्रिज्या होगी।

- | | |
|-------------|-------------|
| (अ) 8 सेमी. | (ब) 4 सेमी. |
| (स) 2 सेमी. | (द) 6 सेमी. |

उत्तर- 1. (i) अ, (ii) स, (iii) व, (iv) द, (v) स, (vi) अ, (vii) व, (viii) द, (ix) स, (x) व, (xi) वा।

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

1. वृत्त का केन्द्र वृत्त के में स्थित है। (वहिर्भाग/अभ्यंतर)
2. एक विन्दु, जिसकी वृत्त के केन्द्र से दूरी वृत्त की त्रिज्या से अधिक हो, वृत्त के में स्थित होता है। (वहिर्भाग/अभ्यंतर)
3. एक चाप होता है जब इसके सिरे एक व्यास के सिरे हो।
4. वृत्त खण्ड एक चाप तथा के बीच का भाग होता है।
5. वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त का होता है।
6. अर्धवृत्त का कोण होता है।
7. चक्रीय चतुर्भुज के समुख कोनों का योग होता है।
8. यदि किसी वृत्त की त्रिज्या एवं बराबर हो तो वे होते हैं।
9. वृत्त के केन्द्र से वृत्त की जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को करता है।
10. वृत्त की परिधि के किन्हीं दो विन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड को वृत्त की कहते हैं।
11. वृत्त के एक ही खण्ड के कोई दो कोण होते हैं।

उत्तर- (i) अभ्यंतर, (ii) वहिर्भाग, (iii) अर्धवृत्त, (iv) जीवा, (v) व्यास, (vi) 90° या समकोण, (vii) 180° या संपूरक कोण, (viii) सर्वांगसम व बराबर, (ix) समद्विभाजित, (x) जीवा, (xi) बराबर

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

1. केन्द्र को वृत्त पर किसी विन्दु से मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त की त्रिज्या होती है।
2. एक वृत्त में समान लंबाई की परिमित जीवाएं होती हैं।
3. यदि एक वृत्त को तीन बराबर चापों में बाँट दिया जाए, तो प्रत्येक भाग दीर्घ चाप होता है।
4. वृत्त की जीवा जिसकी लंबाई त्रिज्या से दो गुनी हो, वृत्त का व्यास है।

5. वृत्त एक समतल आकृति है।

6. दीर्घ वृत्तखण्ड में आन्तरिक कोण न्यून कोण होता है।

7. वृत्त की सामान जीवाये केन्द्र पर सामान कोण अंतरित करती हैं।

8. वृत्त की सबसे बड़े जीवा त्रिज्या कहलाती है।

9. अर्धवृत्त में अंतरित कोण समकोण होता है।

10. यदि दो वृत्तों की त्रिज्याएँ समान हो तो वे वृत्त सर्वांगसम होती हैं।

11. तीन असरख विन्दुओं से होकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।

12. त्रिज्याखण्ड जीवा एवं संगत चाप के बीच का क्षेत्र होता है।

13. एक वृत्त में समान लम्बाई की सीमित जीवायें होती हैं।

14. केन्द्र को वृत्त पर किसी विन्दु से मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त की त्रिज्या होती है।

उत्तर- (i) सत्य, (ii) असत्य, (iii) असत्य, (iv) सत्य, (v) असत्य, (vi) सत्य, (vii) सत्य, (viii) सत्य, (ix) असत्य, (x) सत्य, (xi) सत्य, (xii) सत्य, (xiii) असत्य, (xiv) असत्य,

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए-

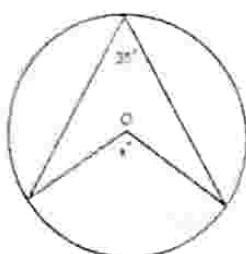
1. एक वृत्त, जिस तल पर स्थित है, उसे कितने भागों में विभाजित करता है?
2. उस जीवा को जो वृत्त केन्द्र से होकर जाती है क्या कहलाती है?
3. वृत्त किसे कहते हैं?
4. यदि वा वृत्त पर दो विन्दुओं पर प्रतिक्षेप करें, तो उनके केन्द्र उभयनिष्ठ जीवा के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित होता है अथवा नहीं।
5. अर्धवृत्त में आन्तरिक कोण कैसा होता है?
6. दीर्घ वृत्तखण्ड में आन्तरिक कोण कैसा होता है?
7. लघु वृत्त खण्ड में आन्तरिक कोण कैसा होता है?
8. चक्रीय समान्तर चतुर्भुज क्या कहलाता है?
9. चक्रीय सम चतुर्भुज क्या कहलाता है?
10. एक विन्दु से एक रेखा पर लंब की लम्बाई रेखा की विन्दु से क्या कहलाती है?
11. यदि कोई विन्दु रेखा पर स्थित है तो रेखा से उसकी दूरी क्या होगी?
12. दो सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याओं में क्या सम्बन्ध होता है?
13. वृत्त के अन्दर का भाग क्या कहलाता है?
14. वृत्त एवं वृत्त के बहार का भाग क्या कहलाता है?

उत्तर- (i) 3 (तीन), (ii) व्यास, (iii) वृत्त किसी तल के उन सभी विन्दुओं का समूह होता है, जो तल के एक स्थिर विन्दु से समान दूरी पर हो, (iv) स्थित होता है, (v) समकोण, (vi) न्यून कोण, (vii) अधिक कोण, (viii) आयत, (ix) वर्ग, (x) दूरी, (xi) शून्य, (xii) बराबर, (xiii) अभ्यंतर।

प्रश्न 5. सही जोड़ी बनाइए-

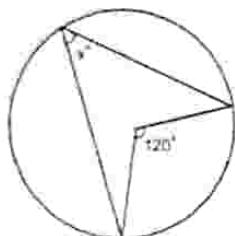
1. अर्धवृत्त का कोण
 - (अ) व्यास होता है
 2. चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग
 - (ब) वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है
 3. चक्रीय समचतुर्भुज
 - (स) 90°
 4. वृत्त की भवसे बहाँ जीवा
 - (द) बराबर
 5. किसी जीवा का लम्बांधक
 - (इ) वर्ग होता है
 6. दो बगावर वृत्तों को त्रिज्याएँ
 - (फ) 180°
- उत्तर- (i) स, (ii) फ, (iii) इ, (iv) अ, (v) ब, (vi) द।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 6. दिये गये चित्र से x का मान ज्ञात कीजिये।

हल- किसी चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण एकान्तर खण्ड में बने कोण से दो गुणा होता है।

$$\begin{aligned} \angle BOC &= 2 \times \angle APB \\ \angle BOC &= 2 \times 30^\circ = 70^\circ \\ x &= 70^\circ \end{aligned}$$

प्रश्न 7. दिये गये आकृति से x का मान ज्ञात कीजिये।

हल- किसी चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण, एकान्तर खण्ड पर बने कोण से 2 गुणा होता है।

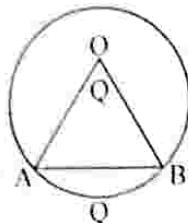
$$\begin{aligned} 120 &= 2x \\ \frac{120}{2} &= x \\ x &= 60^\circ \end{aligned}$$

प्रश्न 8. वृत्त की चाप, चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण और वृत्त को त्रिज्या में सम्बन्ध लिखिए।

हल- वृत्त की चाप, चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण और वृत्त की त्रिज्या में सम्बन्ध-

$$\text{चाप } \widehat{APB} \text{ की लम्बाई} = r \times q$$

- (अ) व्यास होता है
- (ब) वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है
- (स) 90°
- (द) बराबर
- (इ) वर्ग होता है
- (फ) 180°



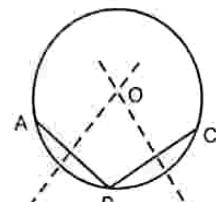
जहाँ r = वृत्त की त्रिज्या तथा Q , चाप \widehat{APB} द्वारा वृत्त के केन्द्र O पर बना कोण अर्थात् $\angle AOB = AOB = QQ$

$$\text{अतः कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

प्रश्न 9. एक दिये हुए वृत्त का केन्द्र मालूम करने की विधि लिखिए।

हल- रचना के पद

- एक वृत्त दिया है
- वृत्त पर छोई भी तीन बिन्दु A, B और C लोजिए
- AB तथा BC को मिलाइए
- AB तथा BC के लंब समद्विभाजक खीचिए जो एक-दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं।



अतः O वृत्त का केन्द्र है।

प्रश्न 10. वृत्त की परिभाषा लिखिए।

हल- पर्याप्त अपने चुनौती में दिया होगा कि सेकण्ड की सुई घड़ी के हमले के अपर्याप्त जल्दी घुक्कर लगाती है तथा दूसरा एक सिरा एक गोल पथ में चलता है। सेकण्ड की सुई के सिरे से बनता हुआ पथ एक वृत्त (Circle)।

प्रश्न 11. वृत्त की जीवा व वृत्त के व्यास से क्या समझते हैं।

उत्तर- (i) वृत्त की चाप- “वृत्त के एक सतत भाग को वृत्त की चाप कहा जाता है।”

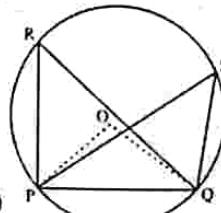
(ii) वृत्त की जीवा- “वृत्त में दो विन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड को वृत्त की जीवा कहते हैं।”

प्रश्न 12. सिद्ध करो कि वृत्त की एक ही अवधा व बने दो कोण बराबर होते हैं।

हल- जात है-

वृत्त $C(o, r)$ में एक ही वृत्त खण्ड PRSQ में दो कोण $\angle PRQ$ एवं $\angle PSQ$

सिद्ध करना है- $\angle PRQ = \angle PSQ$



रचना- रेखाखण्ड OP एवं OQ खीचिए।

उपर्युक्त- वृत्त के किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण उसी चाप द्वारा शेष परिधि पर अन्तरित कोण का दोगुना होता है।

$$\angle POQ = 2 \angle PRQ \dots (1)$$

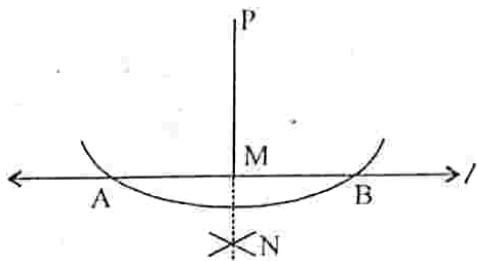
$$\angle POQ = 2 \angle PSQ \dots (2)$$

$$\angle PRQ = \angle PSQ \text{ समि. (1) व (2) से}$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 13. एक बिन्दु से एक रेखा पर रेखा की बिन्दु से दूरी कैसे ज्ञात करेंगे?

हल-



बिन्दु P से एक चाप काटेंगे जो रेखा l को दो बिन्दुओं A व B पर प्रतिच्छेद करेगा।

A व B से समान त्रिज्या के एक-एक चाप कारेंगे जो बिन्दु N पर प्रतिच्छेद करेंगे।

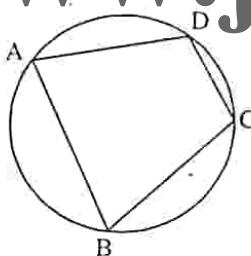
P से M को मिलाने पर रेखा l पर प्रतिच्छेदी बिन्दु M प्राप्त होगा P से M तक की दूरी ज्ञात कर लेंगे जो बिन्दु से रेखा की अधिक दूरी होगी।

प्रश्न 14. दो वृत्तों के सर्वांगसम होने की स्थिति लिखिए।
हल- दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं यदि केवल वे समान त्रिज्या वाले हों।

प्रश्न 15. किसी चक्रीय चतुर्भुज में $\angle A = 100^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle D = 130^\circ$ तो $\angle C$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल-

www.jcdclasses.com



$\angle A = 100^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = ?$, $\angle D = 130^\circ$
 \therefore चक्रीय- चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

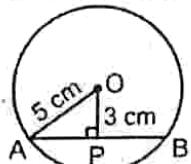
$$100 + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 180 - 100$$

$$\angle C = 80^\circ \text{ (Ans.)}$$

प्रश्न 16. 5CM त्रिज्या वाले वृत्त केन्द्र से 3CM की दूरी पर स्थित जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिये।

हल- वृत्त OA की त्रिज्या = 5 सेमी



माना कि जीवा की लम्बाई AB है

$$OP = 3 \text{ सेमी}$$

चूंकि हम जानते हैं,

$$OA^2 = OP^2 + AP^2$$

$$\Rightarrow 5^2 = 3^2 + AP^2$$

$$\Rightarrow AP^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{16} = 4 \text{ सेमी}$$

$$\Rightarrow AB = 2AP = 2 \times 4 = 8 \text{ सेमी}$$

प्रश्न 17. क्या तीन सरेख बिन्दुओं से होकर एक वृत्त खींचा जा सकता है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिये।

हल- दो बिन्दुओं से होकर जाने वाला वृत्त उन दोनों बिन्दुओं के सरेख तीसरे बिन्दु से होकर नहीं जा सकता।

प्रश्न 18. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 95^\circ$ और $\angle D = 105^\circ$ है। क्या कथन सत्य या असत्य है अपने उत्तर तर्क सहित व्याख्या कीजिये।

हल- ∵ चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।

$$\begin{aligned} \text{यहाँ } \angle A + \angle C &= 90 + 95^\circ \\ &= 185^\circ \end{aligned}$$

$$\text{तथा } \angle B + \angle D = 70 + 105^\circ = 175^\circ$$

$$\text{यहाँ } \angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$

अतः यह एक चक्रीय चतुर्भुज नहीं है।

प्रश्न 19. निम्न की परिभाषा लीजिये।

(i) वृत्त का केन्द्र (ii) अर्धवृत्त

हल- (i) वृत्त का केन्द्र: स्थिर बिन्दु को वृत्त का केन्द्र (Centre of the Circle) कहते हैं।

(ii) व्यास वृत को दो वराबर भागों में बाँटता है एक भाग को अर्धवृत्त कहते हैं।

प्रश्न 20. दो संकेन्द्रीय वृत्त की परिभाषा चित्र सहित समझिए।

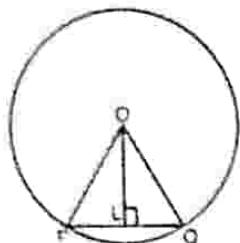
हल- केन्द्रीय वृत्त वृत्त के ऐसे समूह को कहते हैं जिसके प्रत्येक सदस्य का केन्द्र एक ही बिन्दु हो।

प्रश्न 21. सिद्ध करो कि वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

हल- दिया है: वृत्त C(O,r) की जीवा PQ और जीवा PQ पर डाला गया लम्ब OL

सिद्ध करना है: LP = LQ.

रचना: रेखाखण्ड OP और OQ खोचिए। (आकृति)



उपपत्ति: $\angle OLP = \angle OLQ = 90^\circ$.

दो समरूप त्रिभुज OLP और OLQ में,

$$OP = OQ = r. \quad (\text{त्रिज्या})$$

$$OL = OL. \quad (\text{उभयनिष्ठ है})$$

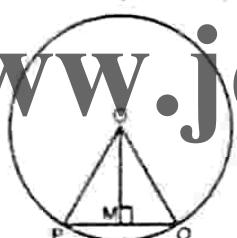
$$\therefore \triangle OLP \cong \triangle OLQ$$

$$\therefore LP = LQ.$$

प्रश्न 22. सिद्ध करो कि वृत्त के केन्द्र से और जीवा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है।
हल- दिया है: वृत्त C(O, r) की जीवा PQ जिसका मध्य बिन्दु M है।

सिद्ध करना है: OM जीवा PQ पर लम्ब है।

रचना: रेखाखण्ड OP और OQ खोचिए। (आकृति)



उपपत्ति: त्रिभुज OPM और त्रिभुज OQM में,

$$PM = MQ, (M, PQ का मध्य बिन्दु है)$$

$$OP = OQ = r. \quad (\text{त्रिज्या})$$

$$\therefore \triangle OPM \cong \triangle OQM, \quad (\text{भुजा-भुजा-भुजा})$$

$$\text{फलस्वरूप} \quad \angle OMP = \angle OMQ$$

$$\text{क्योंकि} \quad \angle OMP + \angle OMQ = 180^\circ$$

$$\angle OMP = \angle OMQ = 90^\circ$$

अतः OM जीवा PQ पर लम्ब है।

प्रश्न 23. सिद्ध करो कि वृत्त की बराबर जीवायें केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

हल- उपपत्ति: आपको एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, को दो बराबर जीवाएँ AB और CD दी हुई हैं।

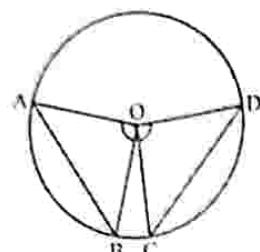
सिद्ध करना : चाहते हैं कि $\angle AOB = \angle COD$ है।

त्रिभुजों AOB तथा COD में,

$$OA = OC \quad (\text{एक वृत्त की त्रिज्या})$$

$$OB = OD \quad (\text{एक वृत्त की त्रिज्या})$$

$$AB = CD \quad (\text{दिया है})$$

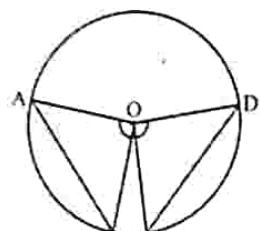


अतः $\triangle AOB \cong \triangle COD$ (SSS नियम)

इस प्रकार, हम पाते हैं कि $\angle AOB = \angle COD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

प्रश्न 24. यदि एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हो तो वे जीवाएँ बराबर होती हैं।

हल-



उपपत्ति: आपको एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की $\angle AOB = \angle COD$ ले, तो

सिद्ध करना है कि $AB = CD$ है।

त्रिभुजों AOB तथा COD में,

$$OA = OC \quad (\text{एक वृत्त की त्रिज्या})$$

$$OB = OD \quad (\text{एक वृत्त की त्रिज्या})$$

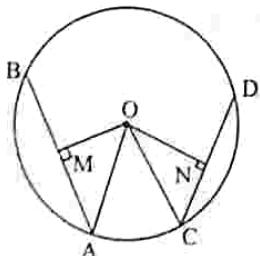
$$\angle AOB = \angle COD \quad (\text{दिया है})$$

अतः $\triangle AOB \cong \triangle COD$ (SSS नियम)

इस प्रकार, हम पाते हैं कि $AB = CD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

प्रश्न 25. सिद्ध करो कि वृत्त की बराबर जीवायें केन्द्र से समान दूरी पर होती हैं।

हल-



दिया है: $AB = CD$

सिद्ध करना है- $OM = ON$

उपपत्ति: $\triangle OMA$ और $\triangle ONC$ में

$$OA = OC \text{ (त्रिज्याएँ)}$$

$$\angle OMA = \angle ONC = 90^\circ$$

$AM = CN$ (\perp जीवा को समद्विभाजित करता है)

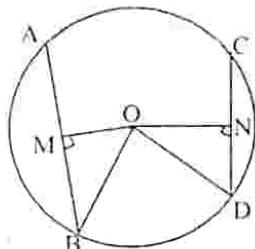
$$\Rightarrow \triangle OMA \cong \triangle ONC \text{ (RHS)}$$

$$\Rightarrow OM = ON \text{ (C.P.C.T.)}$$

इति सिद्धिम्।

प्रश्न 26. सिद्ध करो कि वृत्त के केन्द्र से समदूरस्थ जीवायें लम्बाई में समान होती हैं।

हल-



दिया है: $OM = ON$

सिद्ध करना है- $AB = CD$

उपपत्ति: $\triangle OMB$ और $\triangle OND$ में

$$\angle OMB = \angleOND \text{ (दिया है)}$$

$$\angle OMB = \angleOND = 90^\circ$$

$$OB = OD \text{ (त्रिज्याएँ)}$$

$$\Rightarrow \triangle OMB \cong \triangle OND \text{ (RHS)}$$

$$\Rightarrow BM = DN \text{ (C.P.C.T.)}$$

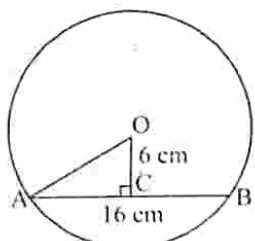
$$2BM = 2DN$$

$$\Rightarrow AB = CD$$

(\perp जीवा को समझाई आपित करता है) इति सिद्धिम्।

प्रश्न 27. किसी वृत्त में जीवा की लम्बाई 16 CM है और वृत्त के केन्द्र से जीवा की लम्बाई 6cm तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिये।

हल-



मान वृत्त की त्रिज्या = $OA = r$ सेमी

$$OC = 6 \text{ सेमी}$$

$$AB = 16 \text{ सेमी}$$

$$AC = \frac{1}{2} AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 = 8 \text{ सेमी}$$

$$\text{समकोण } \triangle OCA \text{ में, } OA^2 = AC^2 + OC^2$$

$$r^2 = 64 + 36 = 100$$

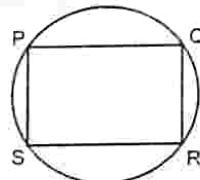
$$r = 10 \text{ सेमी}$$

$$\text{व्यास} = 2r$$

$$= 2 \times 10 = 20 \text{ सेमी।}$$

प्रश्न 28. सिद्ध कीजिये कि चक्रीय समांतर चतुर्भुज आयत होता है।

हल- दिया है- PQRS एक चक्रीय समांतर चतुर्भुज है।



सिद्ध करना है- PQRS एक आयत है।

प्रमाण- चौंक PQRS एक चक्रीय समांतर चतुर्भुज है। हम जानते हैं कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180° होता है।

$$\text{अतः } \angle P + \angle R = 180^\circ$$

$$\text{तथा } \angle Q + \angle S = 180^\circ$$

पुनः समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

$$\text{अतः } \angle P = \angle R = 90^\circ \quad \dots(3)$$

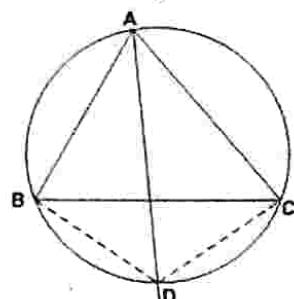
$$\text{तथा } \angle Q = \angle S = 90^\circ \quad \dots(4)$$

इससे सिद्ध है कि समांतर चतुर्भुज के प्रत्येक कोण समकोण है।

अतः चक्रीय समांतर चतुर्भुज PQRS एक आयत है।

प्रश्न 29. किसी त्रिभुज ABC में यदि $\angle A$ का समद्विभाजक तथा BC का लम्ब समद्विभाजक प्रतिच्छेद करें तो सिद्ध कीजिये कि वे $\triangle ABC$ के परिवृत्त पर प्रतिच्छेद करेंगे।

हल- ज्ञात है: $\triangle ABC$ है जिसमें $\angle A$ का समद्विभाजक तथा BC का लम्ब समद्विभाजक परस्पर D पर मिलते हैं। सिद्ध करना है: विन्दु D, त्रिभुज ABC के परिवृत्त पर स्थित मिलाओ।



रचना: BD और CD को मिलाओ।

प्रमाण: $\angle BCD = \angle BAD = \frac{1}{2} \angle A$

(एक वृत्तखण्ड में स्थित कोण)

और $\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle A$

(एक ही वृत्तखण्ड में स्थित कोण)

इसलिए $\angle BCD = \angle DBC$

$\therefore DB = DC$

(समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

इस प्रकार, यिन्हुंने लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है।

प्रश्न 30. किसी वृत्त की दो समान्तर जीवाओं की लम्बाइयाँ 6cm और 8cm हैं। यदि छोटी जीवा केन्द्र से 4cm की दूरी पर हो तो दूसरी जीवा केन्द्र से कितनी दूर है?

हल- ज्ञात है: एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। जीवा AB = 6cm, CD = 8 cm है।

$OP \perp AB$ और $OQ \perp CD$

$AP = 3 \text{ cm}$

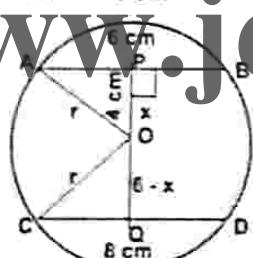
$OP = 4 \text{ cm}$

माना

$OQ = x$

माना

त्रिज्या = r cm



$\Rightarrow \text{AOP में, } r^2 = 4^2 + (3)^2$

$r^2 = 25$

$r = 5$

अब $\triangle OQC$ में, $r^2 = x^2 + 4^2$

या $5^2 = x^2 + 4^2$

या $25 = x^2 + 16$

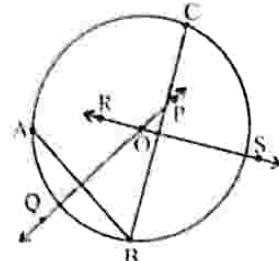
$x^2 = 9$

या $x = \sqrt{9} = 3$

अतः केन्द्र से दूसरी जीवा की दूरी = 3 cm

प्रश्न 31. सिद्ध करो कि तीन असरेख विन्दुओं से होकर एक और केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।

हल- हम तीन विन्दु A, B और C लें, जो एक रेखा पर स्थित न हों।



AB तथा BC के क्रमशः लम्ब समद्विभाजक

PQ और RS खींचिए। मान लीजिए ये लम्ब समद्विभाजक एक बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं (ध्यान दीजिए कि PQ और RS परस्पर प्रतिच्छेद करेंगे, क्योंकि वे समांतर नहीं हैं)

अब क्योंकि O, AB के लम्ब समद्विभाजक PQ पर स्थित है, इसलिए $OA = OB$ है।

इसी प्रकार, क्योंकि O, BC के लम्ब समद्विभाजक RS पर स्थित है, इसलिए आप पाते हैं कि

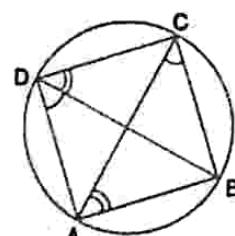
$OB = OC$

इसलिए $OA = OB = OC$ है, जिसका अर्थ है कि बन्दु A, B और C बिन्दु O से समान दूरी पर हैं। अतः यदि आप O को केन्द्र तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचें, तो वह B और C से भी होकर जाएगा। यह दर्शाता है कि तीन बिन्दुओं A, B और C ने हमें एक वृत्त खींचने वाला एक मूलता है। आप जानते हैं कि दो असरेख (लम्ब समद्विभाजक) केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं। दूसरे शब्दों में, A, B और C से होकर जाने वाला एक अद्वितीय वृत्त है।

प्रश्न 32. सिद्ध करो कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180° होता है।

हल- दिया है: एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD

सिद्ध करना है: $\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$



रचना: AC और DB को मिलाइए।

उपपत्ति: $\angle ACB = \angle ADB$ और $\angle BAC = \angle BDC$

[एक वृत्तखण्ड में बने कोण]

$\therefore \angle ACB + \angle BAC = \angle ADB + \angle BDC = \angle ADC$
दोनों ओर $\angle ABC$ जोड़ने पर

$$\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = \angle ADC + \angle ABC$$

$$\text{परन्तु } \angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180^\circ$$

(त्रिभुज के कोणों का योग)

$$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$$

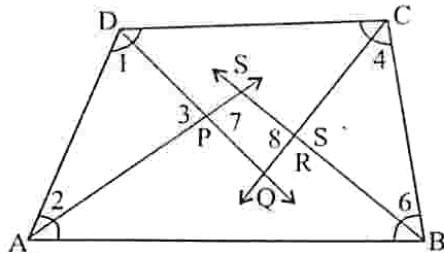
$$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 360^\circ -$$

$$(\angle ADC + \angle ABC) = 180^\circ$$

अतः परिणाम सिद्ध हुआ।

प्रश्न 33. सिद्ध करो कि किसी चतुर्भुज के अंतः कोणों के समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज चक्रीय होता है।

हल-



चतुर्भुज ABCD में

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

$$\frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C + \frac{1}{2} \angle D = 180^\circ$$

$$2\angle 1 + 2\angle 2 + 2\angle 3 + 2\angle 4 = 180^\circ$$

$$\Delta APD \text{ में } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$$

$$\Delta BCR \text{ में } \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$$

$$\text{तब } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360^\circ$$

$$\angle 3 + \angle 5 + 180^\circ = 360^\circ$$

$$\angle 3 + \angle 5 + 180^\circ = 360^\circ$$

समी (i) से

$$\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$$

$$\text{परन्तु } \angle 3 = \angle 7 \text{ व } \angle 5 = \angle P$$

(शिर्षा त्रिमुख कोण)

$$\text{अतः } \angle 7 + \angle 8 = 180^\circ$$

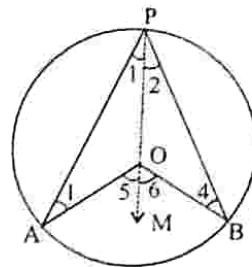
$$\angle P + \angle R = 180^\circ \text{ इसी प्रकार}$$

$$\angle Q + \angle S = 180^\circ$$

⇒ अतः PQ RS एक चक्रीय चतुर्भुज है।

प्रश्न 34. सिद्ध करो कि एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण के शेष भाग के किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगना होता है।

हल-



सिद्ध करना है: $\angle AOB = 2\angle APB$

रचना- P को P से जोड़ते हुए आगे बढ़ाना।

उपपत्ति- $\angle AOP$ में $OP = OA$ (त्रिज्या)

$$\angle 1 = 3 \text{ (सम्मुख कोण बराबर भुजाये के)}$$

वहिक्षण प्रमेय से

$$\angle 1 + \angle 3 = \angle 5$$

$$\angle 1 + \angle 1 = \angle 5$$

$$[∴ \angle 1 = \angle 3]$$

$$2\angle 1 = \angle 5$$

(i)

$$\text{इसी प्रकार } 2\angle 2 = \angle 6$$

(ii)

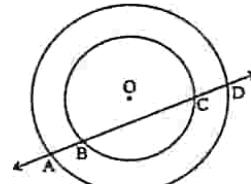
$$\text{अब } 2\angle 1 + 2\angle 2 = \angle 5 + \angle 6$$

$$2(\angle 1 + \angle 2) = \angle 5 + \angle 6$$

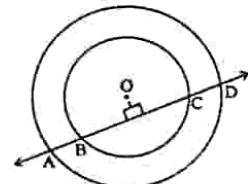
$$2\angle APB = \angle AOB$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 35. यदि एक रेखा दो संकेन्द्री वृत्तों को जिसका केन्द्र O है, ABC और D पर प्रतिच्छेद करे तो सिद्ध कीजिए कि $AB = CD$ है।



हल- दिया है- एक रेखा जो दो संकेन्द्री वृत्तों को जिनका केन्द्र O है, A,B,C और D पर प्रतिच्छेद करती है।



सिद्ध करना है- $AB = CD$

रचना- $OP \perp BC$ खींचिए।

प्रमाण- वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

$$\text{अतः } AP = DP \quad \dots(1)$$

$$\text{और } BP = CP \quad \dots(2)$$

समी. (1) से (2) को घटाने पर

$$= AP = BP = DP = CP$$

$$= AB = CD$$

प्रश्न 36. एक वृत की 5cm तथा 11cm लम्बी दो जीवाएँ AB और CD समान्तर हैं और केन्द्र की विपरीत दिशा में स्थित हैं। यदि AB और CD के बीच की दूरी 6cm हो तो वृत की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

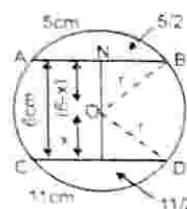
हल- माना कि वृत की त्रिज्या r cm. है।

$$\text{माना } OM = x \text{ cm}$$

$$\text{तथा } ON = (6 - x) \text{ cm}$$

चौंक $OM \perp CD$

अतः M, CD का मध्यबिन्दु है।



चौंक किसी वृत के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब उस जीवा को समद्विभाजित करता है।

$$MD = MC = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} 11 \text{ cm} = \frac{11}{2} \text{ cm}$$

एवं $ON = NB$

अतः N, AB का मध्यबिन्दु है।

$$\text{अतः } NB = NA = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} (5 \text{ cm.}) = \frac{5}{2} \text{ cm.}$$

समकोण $\triangle ONB$ में पाइथागोरस प्रमेय में

$$OB^2 = ON^2 + BN^2$$

$$(r)^2 = (6 - x)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

... (1)

इसी प्रकार समकोण $\triangle OMD$ में, पाइथागोरस प्रमेय में,

$$OD^2 = OM^2 + (MD)^2$$

$$(r)^2 = (x)^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

... (2)

समी. (1) और (2) से

$$(6 - x)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$= (6)^2 - 2 \times 6 \times x + x^2 + x^2 + = x^2 + \frac{121}{4}$$

$$= 36 - 12x + x^2 + \frac{25}{4} = x^2 + \frac{121}{4}$$

$$12x = 36 - \cancel{x^2} - \cancel{\frac{121}{4}} - 36 - \frac{25}{4}$$

$$12x = \frac{121 - (4 \times 36) - 25}{4}$$

$$12x = \frac{121 - 144 - 25}{4}$$

$$12x = \frac{121 - 169}{4}$$

$$12x = \frac{-48}{4}$$

$$12x = -12$$

$$x = \frac{-12}{12} = -1$$

समी. (2) में x का मान रखने पर

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$= (-1)^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

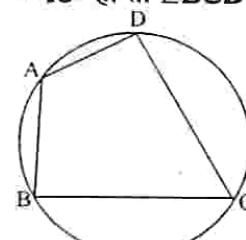
$$= 1 + \frac{121}{4} = \frac{4 \times 1 + 121}{4}$$

$$= \frac{4 + 121}{4} = \frac{125}{4}$$

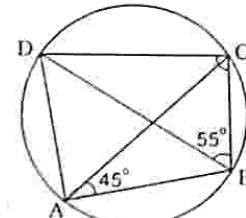
$$r = \sqrt{\frac{125}{4}}$$

अतः वृत की त्रिज्या $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ है।

प्रश्न 37. चित्रानुसार ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसमें AC और BD विकर्ण हैं। यदि $\angle DBC = 55^\circ$ तथा $\angle DBAC = 45^\circ$ हो तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए।



हल-

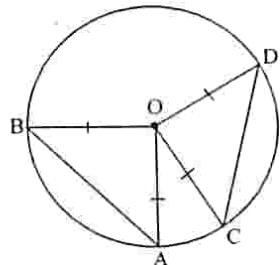


$\angle DBC = 55^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$
 $\angle BCD = ?$
 $\angle DAC = \angle DBC = 55^\circ$ (एकान्तर खण्ड के कोण)
 अब $\angle DAB = 55 + 45^\circ = 100^\circ$

$\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$
 (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)
 $100 + \angle BCD = 180^\circ$
 $\angle BCD = 180 - 100$
 $\angle BCD = 80^\circ$ (उत्तर)

प्रश्न 38. सिद्ध करो की तुल्य जीवाएँ केंद्र पर तुल्य कोण अंतरित करती हैं।

हल-



दिया है- जीवा AB = जीवा CD
 सिद्ध करना है- $\angle AOB = \angle COD$

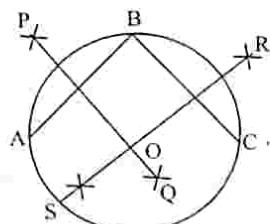
उपपत्ति: $\angle AOB$ व $\angle COD$ में

$DA = DC$ (त्रिज्याएँ)
 $OB = OD$ (त्रिज्याएँ)
 $AB = CD$ (दिया है)
 $\Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle COD$ (SSS)
 अतः $\angle ADB = \angle COD$ (स.त्रिस. कोण)

इति सिद्धम्!

प्रश्न 39. A, B और C किसी वृत्त पर स्थित तीन बिंदु हैं सिद्ध कीजिए कि AB, BC और CA के लम्ब समद्विभाजक वृतदत्त के केन्द्र से होकर जाते हैं।

हल-



AB सा लम्ब समद्विभाजक PQ है
 BC का लम्ब समद्विभाजक RS है

$\therefore A, B, C$ सरेख नहीं हैं तो PR व RS प्रतिच्छेद करेगें।

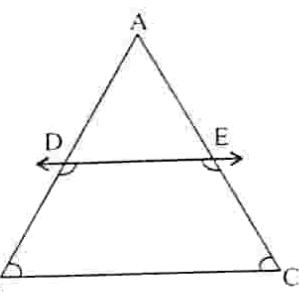
O की A, B व C से दूरी बराबर होगी
 क्योंकि O लम्बार्धक पर है।

$$OA = OB = OC$$

अतः O वृत्त सा केन्द्र होगा और लम्बार्धक केन्द्र से जाएंगे।

प्रश्न 40. यदि किसी समद्विबाहु त्रिभुज के आधार पर समान्तर कोई रेखा उसकी बराबर भुजाओं को प्रतिच्छेद करने के लिए खींची जाये, तो सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बना चतुर्भुज सक्रिय होता है।

हल-



$\angle ABC$ एक समद्विबाहु Δ है $AB = AC$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

$\therefore BC \parallel DE$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ \text{ तथा } \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$$

$$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 \quad [\because \angle 1 = \angle 2]$$

$$\angle 3 = \angle 4$$

$$\text{अब } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$$

$$\angle 1 + \angle 1 + \angle 4 + \angle 4 = 360^\circ$$

$$2\angle 1 + 2\angle 4 = 360^\circ$$

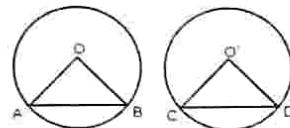
$$\Rightarrow \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$$

इसी प्रकार $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

अतः BCED चक्रीय चतुर्भुज है।

प्रश्न 41. सिद्ध कीजिए कि सर्वांगम वृत्तों की बराबर जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

हल- दिया है- दो सर्वांगम वृत्त हैं जिनके केन्द्र O तथा O' हैं तथा AB और CD इन वृत्तों की जीवाएँ हैं।



सिद्ध करना है- $\angle AOB = \angle CO'D$

प्रमाण-

$\triangle OAB$ तथा $\triangle O'CD$ में

$$OA = O'C$$

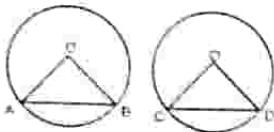
(वृत्त की त्रिज्याएँ)

$$\begin{aligned} OB &= OD \\ AB &= CD \\ SSS \text{ समांगसमता से} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle OAB &\cong \triangle OCD \\ \text{अतः } \angle AOB &= \angle COD \end{aligned}$$

प्रश्न 42. सिद्ध कीजिए कि यदि सर्वांसम वृत्तों की जीवाएं उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करें तो जीवाएं बराबर होती हैं।

हल- दिया है- दो सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएं AB और CD उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।



सिद्ध करना है- $AB = CD$

प्रमाण- $\triangle OAB$ तथा $\triangle OCD$ में

$$\begin{aligned} OA &= OC \\ OB &= OD \end{aligned}$$

$$\angle AOB = \angle COD$$

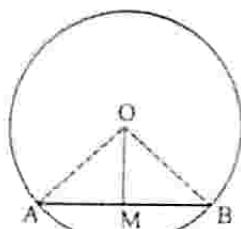
अतः SAS समांगसमता से

$$\triangle OAB \cong \triangle OCD$$

तथा $AB = CD$

प्रश्न 43. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के केन्द्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए ऊची चार रेखा जीवा पर लंब होती है।

हल-



दिया है- एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, कि

AB एक जीवा है और O को AB के मध्य-विन्दु M से मिलाया गया है।

सिद्ध करना है: $OM \perp AB$

रचना- OA और OB को मिलाइए।

प्रमाण: त्रिभुज OAM तथा OBM में,

$$OA = OB$$

(त्रिज्या.)

$$AM = BM$$

(त्रिज्या.)

$$OM = OM$$

(उभयनिष्ठ)

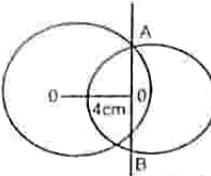
अतः, $\angle OAM = \angle OBM$

इससे प्राप्त होता है:

$$\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$$

प्रश्न 44.5 से.मी. तथा 3 से.मी. त्रिज्या वाले दो वृत्त विन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 4 से.मी. है। उभयनिष्ठ जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल- 5cm तथा 3cm त्रिज्या वाले दो वृत्त दो विन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 4cm है। हम जानते हैं कि केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा उनकी उभयनिष्ठ जीवा की लंबाई समद्विभाजक होती है।



अतः उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई = AB

$$= 2OA$$

$$= 2 \times 3\text{cm.} = 6\text{ cm.}$$

अतः उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई 6 cm है।

प्रश्न 45. 20 मी. त्रिज्या का एक गोल पार्क(वृत्ताकार) एक कालोनी में स्थित है तीन लड़के अंकुर, सैयद तथा डेवि इसकी परिसीमा पर बराबर दूरी पर बैठे हैं, और प्रत्येक के हाथ में एक खिलौना टेलीफोन आपस में बात करने के लिए है। प्रत्येक फोन की डोरी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल- माना कि $SP = xm$

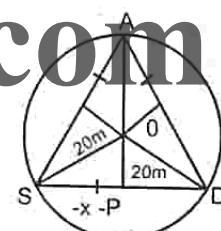
$$\text{समद्विभाजक } OP \text{ तथा } PS$$

$$= (20)^2 = OP^2 + x^2$$

$$= OP^2 = (20)^2 - x^2$$

$$= OP^2 = 400 - x^2$$

$$OP = \sqrt{400 - x^2}$$



समद्विभाजक ASD का क्षेत्रफल

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{मुजा})^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (SD)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (2SP)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} AS^2$$

$$= \sqrt{3}SP^2$$

परन्तु माना $SP = x$ है

$$\text{अतः } \sqrt{3}x^2$$

.....(1)

पुनः समद्विभाजक ASD का क्षेत्रफल

= ΔOSD का क्षेत्रफल + ΔODA का क्षेत्रफल + ΔOAS का क्षेत्रफल

= $3\Delta OAS$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{3 \times (SD)(OP)}{2}$$

$$\frac{3(2SP)(OP)}{2} = 3(SP)(OP)$$

$$= 3(x)\sqrt{400 - x^2} \quad \dots(2)$$

समी. (1) तथा (2) से

$$3x\sqrt{400 - x^2} = \sqrt{3}x^2$$

$$\sqrt{3}\sqrt{400 - x^2} = x$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}\sqrt{400 - x^2})^2 &= (x)^2 \\ &= 3(400 - x^2) = x^2 \\ &= 1200 - 3x^2 = -1200 \end{aligned}$$

$$-3x^2 - x^2 = -1200$$

$$-4x^2 = -1200$$

$$4x^2 = 1200$$

$$x^2 = \frac{1200}{4}$$

$$x^2 = 300$$

$$x = 10\sqrt{3}$$

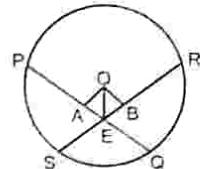
$$\text{अतः } SP = 10\sqrt{3}$$

$$\text{तथा } SP = 2(10\sqrt{3}) = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः प्रत्येक जीवा की दोनों की लम्बाई $20\sqrt{3}$ मात्र है।

प्रश्न 46. यदि वृत्त की दो समान जीवाएं वृत्त के अंदर प्रतिच्छेद करें तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के खण्ड दूसरी जीवा के संगत खण्डों के बराबर हैं।

हल- दिया है- एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, की दो जीवाएँ PQ और RS विन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं।



सिद्ध करना है- PE = RE तथा SE = QE

रचना- जीवाओं PQ तथा RS पर क्रमशः OA ⊥ PQ तथा OB ⊥ RS खींचिए तथा OE को मिलाइए।

प्रमाण- $\triangle OAE$ तथा $\triangle OBE$ में

$$OA = OB$$

(वृत्त की जीवाएँ केन्द्र से समदूरस्थ होती हैं)

$$OE = OE$$

(उभयनिष्ठ)

R.H.S. सर्वांगसमता से

$$\triangle OAE \cong \triangle OBE$$

अतः AE = BE (CPCT)

तथा PA + AE = RB + BE

$$\text{चूंकि } PA = RB = \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} RS.$$

$$\boxed{PE = RE}$$

तथा $PQ = PE + RS = RE$

मर्तु दिया है $PQ = RS$

अतः $QE = SE$

या $\boxed{SE = QE}$

12

अध्याय

हीरोन का सूत्र

स्मरणीय बिंदु

- (i) किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल = $1/2$ (आधार \times ऊँचाई)
- (ii) यदि किसी विषमवाहु त्रिभुज की भुजाओं की लंबाईयाँ क्रमशः a, b और c हो तो अर्द्ध परिमाप = $S = \frac{a+b+c}{2}$
 $2S = a + b + c$
- (iii) हीरोन का सूत्र Δ का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए।

- (i) किसी त्रिभुज जिसकी भुजाएँ a, b और c हों तो इसकी अर्द्ध परिमाप S होती है।

$$(a) a + b + c \quad (v) \frac{a+b+c}{2}$$

$$(s) 2(a + b + c) \quad (d) \frac{a+b+c}{3}$$

(ii) किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल होता है-

$$(a) \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} \quad (v) \text{आधार} = \text{ऊँचाई}$$

$$(s) 1/2 \text{ आधार} \times \text{ऊँचाई} \quad (d) \text{आधार} + \text{ऊँचाई}$$

(iii) किसी त्रिभुज का आधार 4 से.मी. और ऊँचाई 6 से.मी. हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा

$$(a) 12 \text{ वर्ग सेमी} \quad (v) 10 \text{ वर्ग सेमी.}$$

$$(s) 6 \text{ वर्ग सेमी} \quad (d) 8 \text{ वर्ग सेमी.}$$

(ज) किसी त्रिभुज का आधार 12 सेमी. तथा शीर्षलम्ब 8 सेमी. हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा।

- (अ) 12 वर्ग सेमी. (ब) 40 वर्ग सेमी.
(स) 48 वर्ग सेमी. (द) 70 वर्ग सेमी.

(ii) हीरोन का सूत्र होता है-

(i) $s(s - a)(s - b)(s - c)$ (ब) $s(s + a)(s + b)(s + c)$
(स) $\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$ (द) $\sqrt{s(s + a)(s + b)(s + c)}$

उत्तर- (i) ब, (ii) स, (iii) अ, (iv) म, (v) अ, (vi) स, (vii) स
प्रश्न 2. सत्य/असत्य लिखिए-

- (i) त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आधार \times ऊँचाई) होता है।
(ii) विषमबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल का सूत्र = $S(s - a)(s - b)(s - c)$ होता है, जहाँ a, b, c त्रिभुज की भुजाएं तथा S अर्द्धपरिमाप है।
(iii) हीरोन का सूत्र केवल समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने में प्रयुक्त होता है।

- (iv) त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आधार \times ऊँचाई) होता है।
(v) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल होता है उसका आधार \times शीर्षलम्ब
(vi) किसी त्रिभुज की भुजाएं a, b और c हो तो इनका अर्द्ध परिमाप s = $\frac{a + b + c}{2}$ होता है।

- (vii) यदि किसी त्रिभुज का आधार 12 सेमी. तथा शीर्षलम्ब 8 सेमी. वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 48 वर्ग सेमी. है।
उत्तर- (i) असत्य, (ii) सत्य, (iii) असत्य, (iv) सत्य, (v)

सत्य

प्रश्न 3. एक वाक्य में उत्तर लिखिए-

- (i) त्रिभुज का क्षेत्रफल संवेदी हीरोन का सूत्र लिखिए।
(ii) हीरोन का जन्म कहाँ हुआ था?
(iii) किसी त्रिभुज की भुजाओं के योग को क्या कहते हैं?
(iv) किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालने का सूत्र लिखिए।
(v) किसी त्रिभुज के अर्ध परिमाप का सूत्र लिखिए।

- उत्तर- (i) $\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$, (ii) अलेक्जेण्ड्रिया
(मिस्र) में, (iii) परिमाप, (iv) $\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$,
(v) $s = \frac{a + b + c}{2}$

प्रश्न 4. सही जोड़ियां बनाकर लिखिए-

कॉलम-(A) कॉलम-(B)

- (i) हीरोन के सूत्र में s = (अ) आधार \times शीर्षलम्ब

(ii) त्रिभुज का क्षेत्रफल = (ब) $\frac{a^2}{4} \sqrt{3}$

(iii) विषम बाहु त्रिभुज (स) $\frac{a + b + c}{2}$
का क्षेत्रफल

(iv) समबाहु त्रिभुज का (द) $\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$
क्षेत्रफल

(v) समांतर चतुर्भुज का (इ) $\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$
क्षेत्रफल

- उत्तर- (i) स, (ii) द, (iii) इ, (iv) ब, (v) (अ)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 5. किसी त्रिभुज का आधार 16 सेमी. तथा शीर्षलम्ब (ऊँचाई) 8 सेमी हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो।

हल- आधार = 16 सेमी.

शीर्षलम्ब = 8 सेमी

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$
 $= \frac{1}{2} \times 16 \times 8$
 $= 8 \times 8 = 64 \text{ सेमी}^2$

प्रश्न 6. एक समांतर चतुर्भुज का आधार और संगत शीर्षलम्ब क्रमशः 10 सेमी. और 3.5 सेमी. है। तो उसका समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालो।

हल- भुजा = 10 सेमी

संगत शीर्षलम्ब = 3.5 सेमी

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल
 $= \text{आधार} (\text{भुजा}) \times \text{ऊँचाई}$
 $= 10 \times 3.5$
 $= 35.0$
 $= 35 \text{ सेमी}^2$

प्रश्न 7. किसी त्रिभुज की भुजाएं क्रमशः 40 मीटर, 24 मीटर व 32 मीटर हो तो उसका अर्ध परिमाप क्या होगा?

हल- a = 40 मी. b = 24 मी., c = 32 मी.

अर्ध परिमाप = $\frac{a + b + c}{2}$

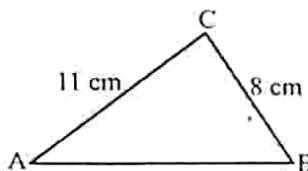
www.jcdclasses.com

$$= \frac{40 + 24 + 32}{2}$$

$$= \frac{96}{2} = 48 \text{ मी.}$$

प्रश्न 8. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 8 सेमी और 11 सेमी हैं और जिसका परिमाप 32 सेमी है।

हल-



यहाँ, परिमाप = 32. cm, $a = 8 \text{ cm}$ और $b = 11 \text{ cm}$ है।
इसलिए, तीसरी भुज $c = 32 \text{ cm} - (8 + 11) \text{ cm} = 13 \text{ cm}$
अब, $2s = 32$ है। इसलिए $s = 16 \text{ cm}$,

$$s - a = (16 - 8) \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

$$s - b = (16 - 11) \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

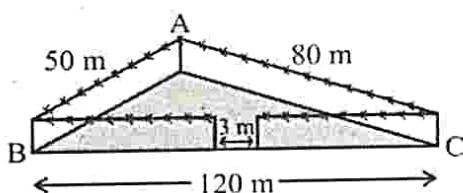
$$s - c = (16 - 13) \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

$$\text{इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3} \text{ cm}^2 = 8\sqrt{30} \text{ cm}^2$$

प्रश्न 9. एक त्रिभुजाकार पार्क ABC की भुजाएँ 120 मीटर, 80 मीटर और 50 मीटर हैं। एक मालिन धनिया को इसके चारों ओर एक बाड़ लगानी है और इसके अन्दर घास उगानी है। उसे कितने क्षेत्रफल में घास उगानी है?

हल-



पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हमें प्राप्त है

$$2s = 50m + 80m + 120m = 250m$$

$$\text{अर्थात् } s = 125 \text{ m}$$

$$s - a = (125 - 120)m = 5 \text{ m},$$

$$s - b = (125 - 80)m = 45 \text{ m},$$

$$s - c = (125 - 50)m = 75 \text{ m}$$

अतः, घास उगाने के लिए क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75} \text{ m}^2$$

$$= 375 \sqrt{15} \text{ m}^2$$

प्रश्न 10. एक त्रिभुजाकार भूखण्ड (प्लाट) की भुजाओं का अनुपात $3 : 5 : 7$ है और उसका परिमाप 300 मीटर है। इस भूखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- हल मान लीजिए भुजाएँ (मीटरों में) $3x, 5x$ और $7x$ हैं (देखिए आकृति 128)

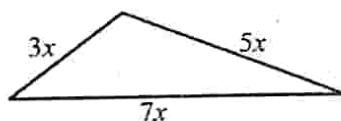
$$3x + 5x + 7x = 300 \text{ (त्रिभुज का पारमाप)}$$

$$15x = 300 \text{ है, जिससे } x = 20 \text{ प्राप्त होता है।}$$

इसलिए, त्रिभुज की भुजाएँ $3 \times 20 \text{ m}, 5 \times 20 \text{ m}$ और $7 \times 20 \text{ m}$ हैं।

अर्थात् ये भुजाएँ 60m, 100m और 140m हैं।

$$\text{अब, } s = \frac{60 + 100 + 140}{2} = 150 \text{ m}$$



इसलिये, क्षेत्रफल

$$= \sqrt{150(150 - 60)(150 - 100)(150 - 140)} \text{ m}^2$$

$$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10} \text{ m}^2$$

$$= 1500\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

प्रश्न 11. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 18 सेमी और 10 सेमी हैं तथा उसका परिमाप 42 सेमी है।

हल- $a = 18 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}$ और $c = ?$

$$\text{परिमाप} = 42 \text{ cm}$$

$$a - b - c = 42$$

$$\text{या } 18 - 10 - c = 42$$

$$\text{या } c = 42 - 28$$

$$\text{या } c = 14 \text{ cm}$$

$$S = \frac{a + b + c}{2}$$

$$S = \frac{42}{2} = 21 \text{ cm}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{21(21-18)(21-10)(21-14)}$$

$$= \sqrt{21 \times 3 \times 11 \times 7}$$

$$\text{अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल} = 21\sqrt{11} \text{ cm}^2$$

प्रश्न 12. एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात $12 : 17 : 25$ है और उसका परिमाप 540 सेमी है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- माना भुजाएँ $a = 12x$, $b = 17x$ और $c = 25x$ हैं।

$$\text{अतः } a + b + c = 540 \text{ cm}$$

$$\text{या } 12x + 17x + 25x = 540$$

$$54x = 540$$

$$\text{या } x = \frac{540}{54} = 10$$

$$\text{अतः भुजाएँ } a = 12 \times 10 = 120 \text{ cm}$$

$$b = 17 \times 10 = 170 \text{ cm}$$

$$c = 25 \times 10 = 250 \text{ cm}$$

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{540}{2} = 270 \text{ cm}$$

होरोम मूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{270(270-120)(270-170)(270-250)}$$

$$= \sqrt{270 \times 150 \times 100 \times 20}$$

$$= \sqrt{3 \times 3 \times 30 \times 30 \times 5 \times 10 \times 10 \times 4 \times 5}$$

$$= 3 \times 30 \times 5 \times 10 \times 2$$

$$= 9000 \text{ cm}^2$$

प्रश्न 13. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 30 सेमी है और उसकी बाराबर भुजाएँ 12 सेमी लम्बाई की हैं। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है: $a = 12 \text{ cm}$, $b = 12$ और $c = ?$

$$\Rightarrow \text{अतः } a + b + c = 30 \text{ cm}$$

$$\text{या } 12 + 12 + c = 30 \text{ cm}$$

$$\text{या } c = 30 - 24 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}$$

होरोम मूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{15(15-12)(15-12)(15-6)}$$

$$= \sqrt{15(3)(3)(9)}$$

$$= \sqrt{5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= 9\sqrt{15} \text{ cm}^2$$

$$\text{अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल } = 9\sqrt{15} \text{ cm}^2.$$

प्रश्न 14. एक त्रिभुजकार पार्क ABC की भुजाएँ 120 मीटर, 80 मीटर और 50 मीटर हैं। पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- देखिए अ.ल.ड. प्रश्न 9

प्रश्न 15. एक यातायात संकेत बोर्ड पर 'आगे स्कूल है' लिखा है और यह भुजा a वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार का है। हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके इस बोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि संकेत बोर्ड का परिमाप 180 सेमी. है तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा?

हल- $a = a$, $b = a$ और $c = a$

$$S = \frac{a+a+a}{2}$$

$$S = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3a}{2}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{3a}{2} - a \right) \left(\frac{3a}{2} - a \right) \left(\frac{3a}{2} - a \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)}$$

$$= \sqrt{3 \cdot \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ cm}^2$$

संकेत बोर्ड का परिमाप = 180 cm

$$3 \times \text{भुजा} = \frac{\text{परिमाप}}{\text{परिमाप}}$$

$$\text{या भुजा} = 3$$

$$\text{या भुजा} = \frac{180}{3}$$

$$\text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ cm}^2$$

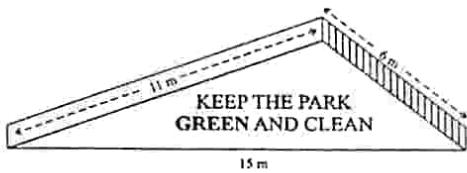
www.jcdclasses.com

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} 60^2 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} 60 \times 60 \text{ cm}^2$$

$$= 900\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

प्रश्न 16. किसी पार्क में एक फिसल पट्टी बनी हुई है, जिसकी पार्श्वर्तीय दीवारों में से एक दीवार पर किसी रंग से पेन्ट किया गया है और इस पर कार्क को हरा भरा और साफ रखिए लिखा हुआ है। यदि इस दीवार की भुजाएँ 15 मीटर, 11 मीटर और 6 मीटर हैं तो रंग से पेन्ट हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल- a = 15m, b = 11m और c = 6m

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{15+11+6}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ m}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{16(6-15)(16-11)(16-6)}$$

$$= \sqrt{16(1)(5)(10)}$$

$$= \sqrt{4 \times 4 \times 1 \times 5 \times 5 \times 2}$$

$$= 20\sqrt{2} \text{ m}^2$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल = $20\sqrt{2} \text{ m}^2$.

प्रश्न 17. किसी फ्लाई ओवर की त्रिभुजाकार दीवारों को विज्ञापनों के लिये प्रयोग किया जाता है। दीवार की भुजाओं की लम्बाईयाँ 122 मीटर, 22 मीटर और 120 मीटर हैं। इस विज्ञापन से प्रतिवर्ष 5000 प्रति वर्गमीटर की प्राप्ति होती है। एक कम्पनी ने एक दीवार को विज्ञापन देने के लिये 3 महीने के लिये किराये पर लिया है। उसने कुल कितना किराया दिया।

हल- a = 122m, b = 22m और c = 120m

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{122+22+120}{2} = \frac{164}{2} = 132 \text{ m}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{132(132-122)(132-22)(132-120)}$$

$$= \sqrt{132(10)(110)(12)}$$

$$= \sqrt{132 \times 10 \times 110 \times 12}$$

$$= \sqrt{12 \times 11 \times 10 \times 11 \times 10 \times 12}$$

$$= \sqrt{12 \times 12 \times 10 \times 10 \times 11 \times 11}$$

$$= 12 \times 10 \times 11$$

$$= 1320 \text{ m}^2$$

$$3 \text{ महीने का विज्ञापन किराया} = 1320 \times 5000 \times \frac{3}{12}$$

$$= 1320 \times 5000 \times \frac{1}{4}$$

$$= 16500000 \text{ रुपये}$$

प्रश्न 18. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 8 सेमी और 11 सेमी हैं और जिसका परिमाप 32 सेमी है।

हल- देखिए अ.ल.उ. प्रश्न 8

प्रश्न 19. एक त्रिभुजाकार पार्क एवीसी की भुजाएँ 120 मी., 80 मी. और 50 मी. हैं। एक मालिन धनिया को इसके चारों ओर एक बाड़ लगानी है और इसके अंदर घास उगानी है। उसे कितने क्षेत्रफल में घास उगानी है?

हल- देखिए अ.ल.उ. प्रश्न 9

प्रश्न 20. एक यातायात संकेत बोर्ड पर 'आगे स्कूल है' लिखा है और यह भुजा 'अ' वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार का है। हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके इस बोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि संकेत बोर्ड का परिमाप 180 सेमी. है तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा?

हल- देखिए अ.ल.उ. प्रश्न 15

प्रश्न 21. एक त्रिभुजाकार भूखण्ड (प्लाट) की भुजाओं का अनुपात 3 : 5 : 7 है और उसका परिमाप 300 मी. है। इस भूखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- 6 भुजा = 10 सेमी

संगत शिर्षलम्ब = 3.5 सेमी

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= \text{आधार (भुजा)} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\begin{aligned} &= 10 \times 3.5 \\ &= 35.0 \\ &= 35 \text{ सेमी.} \end{aligned}$$

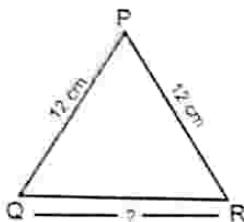
प्रश्न 22. किसी पार्क में एक फिसल पट्टी (Slide) बनी हुई है। इसकी पाश्वर्य दीवारों में से एक दीवार पर किसी रंग से पेंट किया गया है और उस पर 'पार्क' को हरा-भरा और साफ रखिए' लिखा हुआ है यदि दीवार की विमाएँ 15 मी., 11 मी. और 6 मी. हैं तो रंग से पेंट हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- देखिये अनुड़ प्रश्न 16

प्रश्न 23. एक समद्विभाग्य त्रिभुज की परिमाप 30 सेमी. है और उसकी बाहरी भुजाएँ 12 सेमी., लंबाई की हैं त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है-

समद्विभाग्य त्रिभुज की भुजाएँ
 $a = 12\text{ cm.}$, $b = 12\text{ cm.}$, $c = ?$
 परिमाप = 30cm.



त्रिभुज का परिमाप = सभी भुजाओं का योग

$$\begin{aligned} a + b + c &= 30\text{ cm.} \\ 12 + 12 + x &= 30\text{ cm.} \\ 24 + x &= 30\text{ cm.} \\ x &= 30 - 24 \\ x &= 6\text{ cm.} \\ c &= 6\text{ cm.} \end{aligned}$$

$$S = \frac{a + b + c}{2} = \frac{30}{2} = 15\text{ cm.}$$

$$\begin{aligned} \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{15(15-12)(15-12)(15-6)} \\ &= \sqrt{15 \times 3 \times 3 \times 9} \\ &= \sqrt{15 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} \\ &= \sqrt{15 \times (3)^2 \times (3)^2} \\ &= 3 \times 3 \sqrt{15} \\ &= 9\sqrt{15} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $9\sqrt{15}$ cm² है।

प्रश्न 24. एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 12 : 17 : 25 और उसका परिमाप 540 सेमी है, इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- माना कि त्रिभुज की भुजाएँ $12x$, $17x$ तथा $25x$ cm हैं। तब त्रिभुज का परिमाप = सभी भुजाओं का योग

$$540 = 12x + 17x + 25x$$

$$540 = 54x$$

$$x = \frac{540}{54}$$

$$x = 10$$

अतः त्रिभुज की भुजाएँ हैं- $a = 12x = 12 \times 10 = 120\text{ cm.}$

$$b = 17x = 17 \times 10 = 170\text{ cm.}$$

$$c = 25x = 25 \times 10 = 250\text{ cm.}$$

$$\text{अब } S = \frac{120 + 170 + 250}{2} \text{ m.}$$

$$S = \frac{540}{2} = 270\text{ cm.}$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{S(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{270(270-120)(270-170)(270-250)}$$

$$= \sqrt{270 \times 150 \times 100 \times 20}$$

$$= \sqrt{30 \times 9 \times 30 \times 5 \times 20 \times 5 \times 20}$$

$$= \sqrt{(30)^2 \times (20)^2 \times (5)^2 \times (3)^2}$$

$$= 3 \times 5 \times 20 \times 30$$

$$= 9000 \text{ cm}^2$$

अतः इस त्रिभुज का क्षेत्रफल = 9000 cm² है।

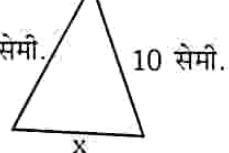
प्रश्न 25. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 18 सेमी. और 10 सेमी. हैं तथा उसका परिमाप 42 सेमी. है।

हल-

$$\text{माना } a = 18 \text{ सेमी.}, \quad 18 \text{ सेमी.}$$

$$b = 10 \text{ सेमी.}$$

$$c = x$$



$$\text{तब } a + b + c = 42$$

$$18 + 10 + x = 42$$

$$x = 42 - 28$$

$$x = 14 \text{ सेमी.}$$

$$S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{21(21-18)(21-10)(21-14)}$$

$$= \sqrt{21 \times 3 \times 11 \times 7}$$

$$= \sqrt{3 \times 7 \times 3 \times 11 \times 7}$$

$$= 3 \times 7 \sqrt{11}$$

$$= 21\sqrt{11} \text{ सेमी}^2$$

13

अध्याय

स्मरणीय बिंदु

- (i) वे आकृतियाँ जिन्हें हम अपनी अभ्यास पुस्तिका अथवा श्यामपट पर खींच सकते हैं जो कि समतल आकृतियाँ कहलाती हैं। जैसे- आयत, वृत्त, वर्ग आदि।
- (ii) इस अध्याय में कुछ ठोस आकृतियाँ (जिन्हें प्रायः ठोस कहते हैं) जैसे शंकु, और गोला के पृष्ठीय क्षेत्रफलों एवं आयतनों के बारे में अध्ययन करेंगे।
- (iii) शिक्षकों से अपेक्षित है कि सभी ठोस आकृतियों के प्रतिरूप (मांडल आकृतियाँ) छात्रों को दिखाए जिससे छात्र आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन की अवधारणा को समझ सकें।
- (iv) विभिन्न सूत्रों के चार्ट बगैरह छात्रों से क्रियाकलाप के माध्यम से तैयार कराकर कक्षा की दीवारों में लगावाएँ और हो सके तो प्रतिदिन इन सूत्रों का मौखिक दोहराव कराएं।

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

(vi) शंकु का आयतन है-

- (अ) $\pi r^2 h$
- (ब) $4/3 \pi r^2 h$
- (स) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$
- (द) $4a^2 h$

(vii) गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र-

- (अ) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$
- (ब) πr^2
- (स) $2\pi rh$
- (द) $4\pi r^3$

उत्तर- (i) स, (ii) ब, (iii) स, (iv), ब, (v) ब, (vi) ब, (vii) द, (viii) स, (ix) ब, (x) स, (xi) स, (xii) ब, (xiii) अ, (xiv) द।

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

1. शंकु के का सूत्र है। π (जहाँ संकेतों के सामान्य अर्थ है।)
2. अर्ध गोले के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल =
3. शंकु का आयतन होता है।
4. अर्धगोले का आयतन होता है।
5. गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = होता है।
6. गोले का आयतन होता है।

उत्तर- (i) घनाभ, (ii) $2\pi rh$, (iii) पृष्ठीय क्षेत्रफल, (iv) $3\pi r^2$, (v) $\sqrt{3}a$, (vi) $d = \sqrt{r^2 + b^2 + h^2}$, (vii) 6 सेमी., (viii) 6, (ix) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$, (x) $\pi r^2 h$ ।

प्रश्न 3. सही जोड़ियाँ बनाकर लिखिए-

स्तम्भ (अ)	स्तम्भ (ब)
------------	------------

- | | |
|--|-----------------------------|
| (i) शंकु का आयतन | (a) $\pi r(r + l)$ |
| (ii) अर्ध गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल | (b) $4/3 \pi r^3$ |
| (iii) शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल | (c) $\frac{2}{3} \pi r^3$ |
| (iv) शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल | (d) $3\pi r^2$ |
| (v) अर्धगोले का आयतन | (e) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ |
| (vi) गोले का आयतन | (f) πr^2 |
- उत्तर- (i) e (ii) d (iii) a (iv) f (v) c (vi) b.

प्रश्न 4. सत्य/असत्य लिखिए-

- (i) वृत्त एक समतल आकृति नहीं है।

(ii) अर्ध गोले का आयतन = $\frac{2}{3} \pi r^3$ जहाँ r अर्ध गोले की त्रिज्या है।

(iii) अर्ध गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल और सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल में अनुपात 2 : 3 होता है।

(iv) शंकु के पासचे पृष्ठ का क्षेत्रफल πr^2 होता है।

(v) गोले का आयतन $\frac{4}{3} \pi r^3$ होता है।

(vi) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $4\pi r^2$ होता है।

(vii) अर्ध गोले का आयतन = $\frac{2}{3} \pi r^3$ जहाँ अर्धगोले की त्रिज्या है।

(viii) अर्ध गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल और संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल में अनुपात 2 : 3 होता है।

उत्तर- (i) अमल्य, (ii) मल्य, (iii) मल्य, (iv) सत्य, (v) सत्य,

(vi) मल्य, (vii) मल्य, (viii) मल्य।

प्रश्न 5. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए-

(i) शंकु के आयतन ज्ञात करने हेतु सूत्र लिखिए। (जहाँ संकेतों के सामान्य अर्थ हो।)

(ii) एक शंकु की ऊँचाई एवं तिर्यक ऊँचाई क्रमशः 12 सेमी. और 13 सेमी. हैं तो इसके आधार की त्रिज्या क्या होगी?

(iii) शंकु के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए। (जहाँ संकेतों के सामान्य अर्थ हो।)

(iv) 3 सेमी. त्रिज्या वाले गोले का आयतन क्या होगा?

(v) शंकु के आयतन ज्ञात करने हेतु सूत्र लिखिए। (जहाँ संकेतों के सामान्य अर्थ हो।)

(vi) शंकु के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए। (जहाँ संकेतों के सामान्य अर्थ हो।)

(vii) 3 सेमी. त्रिज्या वाले गोले का आयतन क्या होगा?

(viii) एक शंकु की ऊँचाई एवं तिर्यक ऊँचाई क्रमशः 12 सेमी. और 13 सेमी हैं तो इसके आधार की त्रिज्या क्या होगी?

उत्तर- (i) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$, (ii) 5 सेमी., (iii) $\pi (r + l)$ (iv) 36π घन सेमी., (v) $\pi r^2 h$, (vi) $V = \frac{1}{3} \pi b \times h$ (vii) $2\pi (r + h)$, (viii) a^3 (ix) $1/3 \pi a^2 h$, (x) $\pi r^2 h$, (xi) $\pi (r + l)$ (xii) 36π घन सेमी., (xiii) 5 सेमी.

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 6. एक शंकु की ऊँचाई 16 cm. और आधार की त्रिज्या 12 cm है। इस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

हल- शंकु की आधार की त्रिज्या $r = 12$ सेमी।

शंकु की ऊँचाई $h = 16$ सेमी।

$$l^2 = r^2 + h^2$$

$$\Rightarrow l^2 = 12^2 + 16^2$$

$$\Rightarrow l^2 = 144 + 256$$

$$\Rightarrow l^2 = 400$$

$$\Rightarrow l = 20 \text{ सेमी.}$$

$$\begin{aligned} \text{शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= \pi l \\ &= 3.14 \times 12 \times 20 \\ &= 753.6 \text{ वर्ग सेमी.} \end{aligned}$$

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 753.6 वर्ग सेमी।

प्रश्न 7. एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी तिर्यक ऊँचाई 21 मी. है और आधार का व्यास 24 मी. है।

हल- दिया है, शंकु के आधार का व्यास = 24 मीटर

शंकु के आधार की त्रिज्या (r) = $\frac{24}{2}$ मीटर = 12 मीटर और शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = 21 मीटर

शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल
 $= \pi l + \pi r^2 = \pi (l + r)$

$$\begin{aligned} &= \frac{22}{7} \times 12 \times (21 + 12) = \frac{22}{7} \times 12 \times 33 \text{ वर्ग मीटर} \\ &= \frac{8712}{7} \\ &= 1244.57 \text{ वर्ग मीटर} \end{aligned}$$

प्रश्न 8. एक शंकु के आधार का व्यास 10.5 सेमी. है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 10 सेमी. है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है, शंकु के आधार का व्यास = 10.5 सेमी

शंकु के आधार की त्रिज्या (r) = $\frac{10.5}{2}$ सेमी = $\frac{105}{20}$ सेमी = $\frac{21}{4}$ सेमी और शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = 10 सेमी

शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = πl

$$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{4} \times 10 = 165 \text{ वर्ग मीटर}$$

प्रश्न 9. निम्न व्यास वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए-
(1) 14 सेमी. (2) 21 सेमी. (3) 3.5 सेमी. (4) 28 सेमी.

हल- (i) दिया है, गोले का व्यास = 14 सेमी.

$$\text{गोले की त्रिज्या } (r) = \frac{14}{2} \text{ सेमी.} = 7 \text{ सेमी.}$$

$$\text{गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4\pi r^2$$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 616 \text{ वर्ग सेमी.}$$

(ii) दिया है, गोले का व्यास = 21 सेमी.

$$\text{गोले की त्रिज्या } (r) = \frac{21}{2} \text{ सेमी.}$$

$$\text{गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4\pi r^2$$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$$

$$= 1386 \text{ वर्ग सेमी.}$$

(iii) दिया है, गोले का व्यास = 3.5 मीटर

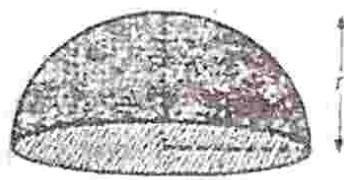
$$\text{गोले की त्रिज्या } (r) = \frac{3.5}{2} \text{ मीटर}$$

$$= \frac{35}{20} \text{ मीटर} = \frac{7}{4} \text{ मीटर}$$

$$\text{गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} = \frac{77}{2} = 38.5 \text{ वर्ग मीटर}$$

प्रश्न 10.10 सेमी. त्रिज्या वाले एक अर्द्ध गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल-



$$\text{दिया है, गोले की त्रिज्या } (r) = 10 \text{ सेमी}$$

अतः अर्द्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$= 3\pi r^2$$

$$= 3 \times 3.14 \times 10 \times 10 = 942 \text{ वर्ग सेमी}$$

नोट- अर्द्धगोले का पृष्ठ गोले के पृष्ठ का आधा नहीं होता। इसमें अर्ध भाग के साथ एक समान त्रिज्या का वृत्तीय आधार बढ़ जाता है।

प्रश्न 11. उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 सेमी^2 है।

हल- माना गोले की त्रिज्या सेमी है।

$$\text{गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4\pi r^2$$

परन्तु प्रश्न में दिया गया है, कि गोले का पृष्ठ 154 वर्ग सेमी. है।

अतः गोले की त्रिज्या (r) = 3.5 सेमी

$$\therefore 4\pi r^2 = 154 \Rightarrow 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$\Rightarrow r^2 \times \frac{154 \times 7}{4 \times 22} = \frac{49}{4} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2} \text{ सेमी}$$

$$\Rightarrow r = 3.5 \text{ सेमी.}$$

प्रश्न 12. उस लंब वृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए

जिसकी- (1) त्रिज्या 6 सेमी. और ऊँचाई 7 सेमी. है।

(2) त्रिज्या 3.5 सेमी. ऊँचाई 12 सेमी. है।

हल- (1) दिया है, लम्बवृत्तीय शंकु की त्रिज्या (r) = 6 सेमी

तथा ऊँचाई (h) 7 सेमी.

$$\therefore \text{लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (6)^2 \times 7 = 264 \text{ घन सेमी.}$$

अतः लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन 264 घन सेमी

(2) दिया है, लम्बवृत्तीय शंकु की त्रिज्या (r) = 3.5 सेमी.

$$= \frac{7}{2} \text{ सेमी.}$$

तथा शंकु की ऊँचाई (h) 12 सेमी.

लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन = $1/3 \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 12 = 154 \text{ घन सेमी.}$$

अतः लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन = 154 घन सेमी.

प्रश्न 13. एक शंकु की ऊँचाई 15 सेमी. है। यदि इसके आयतन 1570 सेमी^3 है तो आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल- माना शंकु के आकार की त्रिज्या r सेमी. है।

दिया है, शंकु की ऊँचाई (h) = 15 सेमी.

$$\therefore \text{शंकु का आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times r^2 \times 15 = 15.70 r^2 \text{ घन सेमी.}$$

= परन्तु प्रश्न में दिया गया है कि शंकु का आयतन

$$= 1570 \text{ सेमी}^3$$

$$\therefore 15.70 r^2 = 1570 \Rightarrow r^2 = \frac{1570}{15.70} = \frac{1,57,000}{1,570} = 100$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{100} = 10 \text{ सेमी.}$$

अतः शंकु के आधार की त्रिज्या 10 सेमी. है।

प्रश्न 14. एक लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन 9856 सेमी.^3 है। यदि इसके आधार का व्यास 28 सेमी. है तो निम्न ज्ञात कीजिए-

- (1) शंकु की ऊँचाई,
- (2) शंकु की तिर्यक ऊँचाई,
- (3) शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल

हल- दिया है, शंकु के आधार का व्यास = 28 सेमी., शंकु के आधार की त्रिज्या (r) = $28/2$ सेमी. = 14 सेमी. शंकु का आयतन = 9856 घन सेमी

- (1) माना शंकु की ऊँचाई h सेमी. है।

$$\therefore \text{शंकु का आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times h = \frac{616}{3} h \text{ घन सेमी.}$$

परन्तु प्रश्नानुसार, शंकु का आयतन = 9856 घन सेमी.

$$h \times \frac{616}{3} = 9856 \Rightarrow h = \frac{9856 \times 3}{616} = 48 \text{ सेमी.}$$

अतः शंकु की ऊँचाई 48 सेमी. है।

- (2) माना शंकु का तिर्यक ऊँचाई सेमी. है।

$$\therefore F = r^2 + h^2$$

$$= F = (14)^2 + (48)^2 [\because r = 14 \text{ सेमी. व } h = 48 \text{ सेमी.}]$$

$$F = \sqrt{196 + 2304} = 2500$$

$$F = \sqrt{2500} = 50 \text{ सेमी.}$$

अतः शंकु का तिर्यक ऊँचाई 50 सेमी. है।

- (3) दिया है, शंकु की त्रिज्या (r) = 14 सेमी. और शंकु की तिर्यक ऊँचाई (F) = 50 सेमी.

शंकु का वक्र पृष्ठ = πF

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 50 = 2200 \text{ वर्ग सेमी.}$$

अतः शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2200 वर्ग सेमी. है।

प्रश्न 15. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या निम्न है-

- (1) 7 सेमी.
- (2) 0.63 सेमी.
- (3) 28 सेमी.
- (4) 0.21 सेमी.

हल- (1) दिया है, गोले की त्रिज्या (r) = 7 सेमी.

$$\text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^3 = \frac{4}{3} \times 22 \times 7 \times 7 \text{ घन सेमी.}$$

$$= \frac{4312}{3} = 1437 \frac{1}{3} \text{ सेमी.}$$

अतः गोले का आयतन $1437 \times \frac{1}{3}$ घन सेमी.

(2) दिया है, गोले की त्रिज्या (r) = 0.63 मीटर

$$\text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (0.63)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.63 \times 0.63 \times 0.63$$

$$= 1.047816 - 1.05 \text{ घन मीटर}$$

अतः गोले का आयतन 1.05 घन मीटर (लगभग)

हल- (1) दिया है, गोले की त्रिज्या = 28 सेमी.

$$\text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (28)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (28 \times 28 \times 28)$$

$$= \frac{275968}{3}$$

$$= 91989.34 \text{ cm}^3$$

अतः गोले का क्षेत्रफल = 91989.34 cm^3 है।

(2) दिया है, गोले की त्रिज्या = 0.21 मीटर

$$\therefore \text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (0.21)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.009261 = 0.038808 \text{ cm}^3$$

अतः गोले का आयतन = 0.038808 घन मीटर (लगभग)

प्रश्न 16. धातु की एक गेंद का व्यास 4.2 सेमी. है। यदि इस धातु का घनत्व 8.9 ग्राम/सेमी.³ है तो इस गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है, गेंद का व्यास 4.2 सेमी. है।

$$\therefore \text{गेंद की त्रिज्या} (r) = \frac{4.2}{2} \text{ सेमी.} = 2.1 \text{ सेमी.}$$

$$\therefore \text{गेंद का आयतन} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.1 = 28.808 \text{ घन सेमी.}$$

गेंद का द्रव्यमान = गेंद का आयतन \times गेंद की धातु का घनत्व
 \therefore द्रव्यमान = आयतन \times घनत्व]

$$= 38.808 \times 8.9 = 345.39 \text{ ग्राम (लगभग)}$$

अतः गेंद का द्रव्यमान 345.39 ग्राम (लगभग)

प्रश्न 17. चन्द्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक चौथाई है। तो चन्द्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन की कौन-सी भिन्न है?

हल- माना पृथ्वी का व्यास 4D मीटर है।

पृथ्वी की त्रिज्या (R) = 2D मीटर है।

$$\therefore \text{चन्द्रमा का व्यास} = \frac{1}{4} \times 4D = D \text{ मीटर}$$

$$\therefore \text{चन्द्रमा की त्रिज्या } r = \frac{D}{2} \text{ मीटर}$$

$$\text{तब चन्द्रमा का आयतन} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 \quad (\because r = \frac{D}{2})$$

$$= \frac{\pi D^3}{6}$$

$$\text{और पृथ्वी का आयतन} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (2D)^3 \quad (\because r = 2D)$$

$$= \frac{32\pi D^3}{3} \text{ घन मीटर}$$

चन्द्रमा का आयतन

$$\therefore \frac{\text{चन्द्रमा का आयतन}}{\text{पृथ्वी का आयतन}} = \frac{1}{32}$$

$$= \frac{\pi D^3}{6} = \frac{\pi D^3}{6} \times \frac{-3}{32\pi D^3} = \frac{1}{64}$$

प्रश्न 18.14 सेमी. व्यास वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

निकालो।

हल- व्यास = 14cm.

त्रिज्या = 14/2 = 7cm.

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 616\text{cm}^2$$

प्रश्न 19. एक लंब वृत्तीय शंकु का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी तिर्यक ऊंचाई 10 सेमी. है और आधार की त्रिज्या 7 सेमी है।

हल- CSA = $\pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 = 220\text{ cm}^2$$

प्रश्न 20. उस गोले का त्रिज्या ज्ञात कीजिए पृष्ठीय क्षेत्रफल

154 सेमी. है।

हल- गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 154cm^2

$$4\pi r^2 = 154$$

$$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$r^2 = \frac{154 \times 7}{2 \times 22} = 49$$

$$r^2 = \frac{49}{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$$

$$r = \frac{7}{2} = 3.5\text{cm.}$$

अतः गोले की त्रिज्या 3.5cm. है।

प्रश्न 21. गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जब उसकी त्रिज्या 10.5 सेमी. हो।

हल- गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times (10.5)^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 10.5 \times 10.5 = \frac{9702}{7} = 1386\text{cm}^2$$

प्रश्न 22. एक शंकु का आयतन ज्ञात करो जिसकी त्रिज्या 6 सेमी. एवं ऊंचाई 7 सेमी. है।

हल- लंब वृत्तीय शंकु का आयतन = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 7$$

$$= 22 \times 2 \times 6 = 264\text{cm}^3$$

त्रिज्या = 3.5cm, ऊंचाई = 12cm. है।

प्रश्न 23. 7 सेमी. त्रिज्या वाले गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल- $r = 7\text{cm.}$

$$\text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$$

$$= \frac{4312}{3} = 1437.33\text{cm}^3$$

प्रश्न 24. एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी तिर्यक ऊंचाई 21 मीटर है और आधार का व्यास 24 मीटर है।

www.jcdclasses.com

हल- शंकु के आधार का व्यास = 24m

$$\text{त्रिज्या} = \frac{24}{2} = 12\text{m}$$

शंकु की ऊँचाई (h) = 21m.

शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi(4r)$

$$= \frac{22}{7} \times 12(21 + 12) = \frac{264}{7}(33)$$

$$= \frac{8712}{7} = 1244.57\text{m}^2$$

अतः शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 1244.57m^2 है।

प्रश्न 25.10 सेमी. त्रिज्या वाले एक अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$) लीजिए।

हल- अर्धगोले की त्रिज्या = 10cm.

अर्ध गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2$

$$= 3 \times 3.14 \times 10 \times 10 = 942\text{ cm}^2$$

प्रश्न 26.7 सेमी. त्रिज्या वाले एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है- मेंद की त्रिज्या = 7 सेमी.

प्रयुक्त सूत्र- एक गोले का पृष्ठफल = $4\pi r^2$

गणना- एक गोले का पृष्ठफल = $4 \times \pi \times (7)^2$

$$= 4 = (22/7) \times 7 \times 7$$

$$= 4 \times 54$$

$$= 616 \text{ सेमी}^2$$

अभीष्ट पृष्ठफल 616 सेमी² है।

प्रश्न 27.11.2 सेमी. त्रिज्या वाले गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल- माना गोले की त्रिज्या r है।

अब गोले का आयतन = $\left(\frac{4}{3}\right) \pi r^3$

शंकु के लिए h = 11.2cm, r = 2.8 cm.

अब, शंकु का आयतन = गोले का आयतन

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right) \pi r^3 = \left(\frac{1}{3}\right) \pi r^2 h$$

$$\Rightarrow 4r^3 = r^2 h$$

$$\Rightarrow 4r^3 = [(2.8)^2 \times (11.2)]$$

$$\Rightarrow r^3 = [(2.8)^2 \times (11.2)/4]$$

$$\Rightarrow r = [(2.8)^2 \times 2.8]$$

$$\Rightarrow r^3 = (2.8)^3$$

$$\Rightarrow r = 2.8$$

$$\therefore \text{व्यास } 2r = 2 \times (2.8) = 5.6 \text{ cm है।}$$

$$\therefore \text{व्यास } 2r = 2 \times (2.8) = 5.6\text{cm है।}$$

प्रश्न 28.एक अर्ध गोलाकार कटोरे की त्रिज्या 3.5 सेमी. है इसके अन्दर भरे जा सकने वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल- अर्ध गोलाकार घन फल

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 42.875$$

$$= \frac{2}{3} \times 22 \times 6.125$$

$$= \frac{269.5}{3}$$

प्रश्न 29.उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी. है।

हल- गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 154cm²

$$4\pi r^2 = 154$$

$$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$r^2 = \frac{154 \times 7}{22 \times 4} = \frac{49}{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$$

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{4^2}{3} \times \frac{22^{11}}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

$$= \frac{11 \times 7 \times 7}{3} = \frac{539}{3} = 179.66\text{cm}^3$$

प्रश्न 30.एक शंकु की ऊँचाई 15 सेमी. है यदि इसका आयतन 1570 घन सेमी है तो इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है h = 15cm.

शंकु का आयतन = 1570cm³

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 1570$$

$$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times r^2 \times 15 = 1570$$

$$r^2 = \frac{1570 \times 3}{3.14 \times 15} = \frac{47100}{47.1} = 100$$

$$r^2 = 100$$

$$r = \sqrt{100}$$

$$r = 10\text{cm.}$$

अतः शंकु के आधार की त्रिज्या 10cm. है।

स्मरणीय बिंदु

- एक निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किए गए तथ्यों या अंकों को आंकड़े कहा जाता है।
- जब कोई शोधकर्ता निश्चित उद्देश्य से आंकड़े एकत्रित करता है तो वे प्राथमिक आंकड़े कहलाते हैं।
- ऐसे आंकड़े जो किसी एक व्यक्ति द्वारा किसी अन्य संदर्भ में एकत्रित किए गए हों और शोधकर्ता उन्हें अपने प्रयोग में ले तो वे गौण आंकड़े कहलाते हैं।
- आंकड़ों के अधिकतम एवं न्यूनतम मानों के अन्तर को आंकड़ों का परिसर कहते हैं।
- किसी वर्ग की उच्च सीमा एवं निम्न सीमा के अन्तराल को वर्गान्तर कहते हैं।
- प्रेक्षणों के सभी मानों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देने पर माध्य प्राप्त होता है। इसे x से प्रकट किया जाता है।

अवर्गीकृत वारंवरता बंटन के लिये मह-

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \dots + f_n \cdot x_n}{N}$$

जहाँ $N = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

- आंकड़ों का आरोही या अवरोही क्रम में करने पर सबसे मध्य वाले प्रेक्षण का मान होता है।
- यदि n विषय संख्या है तो माध्यक $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें प्रेक्षण का मान।
- यदि n सम संख्या है तो माध्यक $= \left(\frac{n}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ वें प्रेक्षण के मानों का माध्य।
- बहुलक सबसे अधिक बार आने वाला प्रेक्षण का मान होता है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

- (i) संख्याओं **2, 4, 6, 8, 10** का माध्य है।
 (अ) 4 (ब) 6 (स) 8 (द) 6.5
 (ii) आंकड़ों **9, 1, 7, 3, 5** का माध्यक होगा।
 (अ) 3, (ब) 7, (स) 1, (द) 5

(iii) आंकड़ों **14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18** का बहुलक निम्न में से क्या होगा?

(अ) 14, (ब) 18, (स) 22, (द) 23

(iv) निम्नलिखित में से केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप नहीं है-

(अ) माध्यक (ब) माध्य (स) मीटर (द) बहुलक

(v) एक निश्चित उद्देश्य एकत्रित किये गये तथ्यों को क्या कहते हैं?

(अ) संकेत (ब) अंक

(स) आंकड़े (द) उपरोक्त में से कोई नहीं

(vi) जब कोई शोधकर्ता एक निश्चित उद्देश्य रखकर आंकड़े एकत्रित करता है तो उन आंकड़ों को कहते हैं-

(अ) प्राथमिक आंकड़े (ब) द्वितीयक आंकड़े

(स) तृतीयक आंकड़े (द) उपरोक्त सभी।

(vii) आंकड़ों का अधिकतम व न्यूनतम अंतर कहलाता है-

(अ) माध्य (ब) परिसर (स) माध्यक (द) बहुलक

(viii) केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप में किसका अवास्था किया जाता है-

(अ) माध्य (ब) माध्यक (स) बहुलक (द) उपरोक्त सभी

(ix) सबसे अधिक बार ने वाला प्रेक्षण होता है-

(अ) बहुलक (ब) माध्य (स) माध्यक (द) आयत चित्र

(x) प्रथम पांच प्राकृत संख्याओं का माध्य होगा-

(अ) 2 (ब) 3

(स) 5 (द) 0

(xi) आंकड़े **7, 1, 3, 9, 5** का माध्यक होगा-

(अ) 3, (ब) 7

(स) 1 (द) 5

(xii) **10, 12, 13, 12, 11, 14, 12, 10, 15, 12, 9** आंकड़ों का बहुलक है-

(अ) 10 (ब) 12

(स) 9 (द) 6

उत्तर- (i) ब, (ii) अ, (iii) अ, (iv) स, (v) स, (vi) अ, (vii) ब,

(viii) द, (ix) अ, (x) ब, (xi) द, (xii) ब

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

- (i) एक निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किए गए तथ्यों या अंकों को कहा जाता है।

- (ii) अध्ययन का वह क्षेत्र है जिसमें आंकड़ों के प्रति प्रस्तुतिकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन पर विचार किया जाता है।
- (iii) आंकड़ों के अधिकतम एवं न्यूनतम मानों का अंतर आंकड़ों का कहलाता है।
- (iv) यद्यमें अधिक बार आने वाले प्रेक्षण को कहते हैं।
- (v) संख्या 7, 8 और 9 का माध्य होता है।
- (vi) किसी वर्ग की उच्च सीमा और निम्न सीमा के अंतर को कहते हैं।
- (vii) एक निश्चित ठहराय में एकत्रित किये गये तथ्यों या अंकों को कहते हैं।
- (viii) वर्ग अंतराल 80-90 में 80 वर्ग की वर्ग सीमा है।
- (ix) 9, 5, 3, 4, 7, 3 का परिसर होता है।
- (x) आंकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर मध्य पद कहलाता है।
- उत्तर-** (i) आंकड़े, (ii) मानियकों, (iii) परिसर, (iv) बहुलक, (v) 8, (vi) वर्गान्तर, (vii) आंकड़े, (viii) निम्न, (ix) 6, (x) भाष्यक।

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

- (i) अधिकतम बारंबारता वाले प्रेक्षण के बहुलक कहा जाता है।
- (ii) सभी किसी वर्ग को वह मान होता है जो इन दो काटकों की सीमा से अभक्त के देना है।
- (iii) सबमें अधिक बार आने वाले प्रेक्षण को बहुलक कहा जाता है।
- (iv) आंकड़ों के अधिकतम व न्यूनतम मानों के अंतर को आंकड़ों का परिसर कहते हैं।
- (v) वर्ग अंतराल 50-60 में 50 वर्ग की उच्च वर्ग सीमा है।
- (vi) वर्ग अंतराल 10-20 में 20 वर्ग की उच्च वर्ग सीमा है।
- (vii) दड़ चित्र सदैव उच्चाधर बनाये जाते हैं।
- (viii) 4, 3, 9, 2, 6, 6, 8 का परिसर 5 होगा।
- (ix) माध्यक आंकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर मध्य पद होता है।
- (x) माध्य आंकड़ों का औसत मान तो है।

उत्तर- (i) सत्य, (ii) असत्य, (iii) सत्य, (iv) सत्य, (v) असत्य,

(vi) सत्य, (vii) असत्य, (viii) असत्य, (ix) सत्य, (x) सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए-

- (i) प्रेक्षणों का माध्य जाते करने के लिए सूत्र लिखिए।
- (ii) जब प्रेक्षणों की संख्या n विषम होती है तब प्रेक्षणों को आरोही/अवरोही क्रम में व्यवस्थित करनेपर माध्यक कौन-से प्रेक्षण का मान होता है।

- (iii) माध्य किसे कहते हैं?
- (iv) सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण को क्या कहते हैं?
- (v) 2, 4, 2, 7, 4, 5, 5, 6 का बहुलक 4 है तो 6 का मान क्या होगा?
- (vi) समान्तर माध्य जात करने का सूत्र लिखो।
- (vii) वर्ग 50-60 का परास जात करो।
- (viii) संख्या 3, 4, 5 का समान्तर माध्य जात करो?
- (ix) प्रथम पाच सम प्राकृत संख्याओं का माध्य क्या होगा?
- (x) 3, 5, 4, 4, 2, 3, 4, 5, 6 का बहुलक जात करो।
- (xi) आंकड़ों 5, 3, 1, 9, 7 का माध्यक क्या होगा?
- (xii) आंकड़ों का औसत मान क्या कहलाता है?
- (xiii) केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप कौन-कौन सी है?

$$\text{उत्तर- (i) माध्य} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$(ii) \text{मध्यिका} = \frac{n}{2} \text{वें पद का मान} + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \text{वें पद का मान}$$

$$(iii) \text{माध्य आंकड़ों का औसत मान है। (iv) बहुलक, (v) } x = 4, (vi) \text{ समान्तर माध्य} = \frac{\text{आंकड़ों का योग}}{\text{आंकड़ों की संख्या}}$$

$$(vii) 10, (viii) 4, (ix) 6, (x) 4, (xi) 5, (xii) माध्य, (xiii) माध्य,$$

$$\text{प्रश्न 5. सहा जाइ बनाइए}$$

कॉलम-(A) कॉलम-(B)

- | | |
|--|--------------------------------|
| (i) माध्य, माध्यक और बहुलक | (अ) बहुलक |
| (ii) सबसे अधिक बार आने वाला प्रेक्षण | (ब) 6 |
| (iii) आंकड़ों का औसत मान | (स) माध्यक |
| (iv) वितरण को आरोही या अवरोही क्रम में करने पर मध्य पद | (द) केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप |
| (v) 5, 6 और 7 का माध्य | (इ) 5 |
| (vi) 7, 1, 3, 9, 5 का माध्यक | (च) माध्य |
| (vii) वर्ग अंतराल 50-60 की उच्च वर्ग सीमा | (छ) 50 |
| (viii) वर्ग अंतराल 50-60 की निम्न वर्ग सीमा | (ज) 60 |

उत्तर- (i) द, (ii) अ, (iii) छ, (iv) स, (v) च, (vi) च, (vii) ज, (viii) छ।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 6. एक विद्यालय में नवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों द्वारा (100 अंकों में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नानुसार हैं-

10	20	36	92	95	40	50	56	60	70
92	88	80	70	72	70	36	40	36	40
92	40	50	50	56	60	70	60	60	88

0-10 (जिसमें 10 सम्मिलित नहीं) को पहला अंतराल लेकर ऊपर दिए गए।

आंकड़ों से वर्ग माप 10 वाली एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

हल-

वर्ग	टेली चिन्ह	बारम्बारता
0-10		0
10-20		1
20-30		1
30-40		3
40-50		4
50-60		5
60-70		4
70-80		5
80-90		3
90-100		4
योग		30

प्रश्न 7. एक टीम ने फुटबॉल के 10 मैचों में निम्नलिखित गोल किए।

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

इन गोलों की संख्या के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल- टीम द्वारा फुटबाल के 10 मैचों में किए गए गोल- 2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

गोलों का माध्य = $\frac{\text{सभी गोलों का योग}}{\text{मैचों की संख्या}}$

$$= \frac{2+3+4+5+0+1+3+3+4+3}{10}$$

$$= \frac{28}{10}$$

$$= 2.8 \text{ गोल}$$

अब, गोलों को आरोही क्रम में लिखने पर,

0, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5

n = 10 (सम)

$$\therefore \text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2} \text{ वें पद का मान} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) \text{ वें पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{5 \text{ वें पद का मान} + 6 \text{ वें पद का मान}}{2}$$

$$= \text{माध्यिका} = \frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

यहाँ 0, 1, 2, व 5 की बारम्बारता = 1 है।

और 3 की बारम्बारता = 4 है।

स्पष्ट है कि 3 की बारम्बारता सर्वाधिक है।

∴ बहुलक = 3

अतः माध्य = 2.8, माध्यिका = 3, और बहुलक = 3

प्रश्न 8. गणित की परीक्षा में 15 विद्यार्थियों ने (100 में से) निम्नलिखित अंक प्राप्त किए।

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

इन आंकड़ों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल- 15 विद्यार्थियों के प्राप्तांक- 41, 39, 48, 52, 46, 62,

54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

प्राप्तांकों का माध्य = $\frac{\text{प्राप्तांकों का योग}}{\text{विद्यार्थियों की संख्या}}$

$$41 + 39 + 48 + 52 + 46$$

$$= \frac{+ 62 + 54 + 40 + 96 + 52 + 98 + 40 + 42 + 52 + 60}{15}$$

$$= \frac{822}{15} = 54.8$$

अब प्राप्तांकों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर 39, 40,

40, 41, 42, 46, 48, 52, 52, 52, 54, 60, 62, 96, 98

a = 15 (विषय)

$$\therefore \text{माध्यिका पद} = \frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2} = \frac{16}{2}$$

प्रेक्षणों का माध्यिका = 8 वें पद का मान = 52

प्रश्न 9. निम्नलिखित प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित

किया गया है। यदि आंकड़ों का माध्यिका 63 हो तो x का

मान ज्ञात कीजिए।

29, 32, 48, 50, x, x + 2, 72, 78, 84, 95

हल- दिए गए प्रेक्षण आरोही क्रम में व्यवस्थित हैं।

n = 10 (सम)

82 / प्रश्न चैप्टर-2023

$$\text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2} \text{वें पद का मान} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) \text{वें पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{\frac{10}{2} \text{वें पद का मान} + \left(\frac{10}{2} + 1\right) \text{वें पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{5 \text{वें पद का मान} + 6 \text{वें पद का मान}}{2}$$

$$= x \text{ और } x + 2 \text{ का माध्य}$$

$$= \frac{x + x + 2}{2}$$

$$= x + 1$$

परन्तु दिया है कि माध्यिका 63 है।

$$\therefore x + 1 = 63$$

$$\Rightarrow x = 63 - 1 = 62$$

अतः x का मान = 62

प्रश्न 10. निम्नलिखित सारणी से एक फैक्टरी में काम कर रहे 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन ज्ञात कीजिए।

वेतन (रुपयों में)	कर्मचारियों की संख्या
3000	16
4000	12
5000	10
6000	8
7000	6
8000	4
9000	3
10000	1
कुल योग	60

हल- माध्य वेतन की गणना के लिए तालिका

वेतन (रुपये) (x)	कर्मचारियों की संख्या	(fx)
3000	16	48000
4000	12	48000
5000	10	50000
6000	8	48000
7000	6	42000

8000	4	32000
9000	3	27000
10000	1	10000
योग	$\Sigma f = 60$	$\Sigma fx = 305000$

$$\therefore \text{माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{305000}{60} = \frac{15250}{3} = 5083.33$$

अतः यैकटों के 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन = 5083.33
प्रश्न 11. 12, 9, 10, 13, 15 व 10 का माध्य ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल- माध्य} = \frac{\text{समस्त प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

$$= \frac{12 + 9 + 10 + 13 + 15 + 10}{6}$$

$$= \frac{69}{6}$$

$$= \frac{23}{2}$$

$$= 11.5 \text{ (उत्तर)}$$

प्रश्न 12. 10, 7, 8, 7, 10, 11, 11, 12 और ग का बहुलक 11 है तो g का मान ज्ञात कीजिए।

हल- 10 व 11 का आवृत्ति एक समान है, बहुलक 11 है।

अतः g का मान 11 होना चाहिए।

प्रश्न 13. आंकड़े, 3, 5, 9, 1, 6, 7 का साध्यक ज्ञात करो?

हल- 3, 5, 9, 1, 6, 7 को आरोही क्रम में लिखने पर 1, 3, 5, 6, 7, 9

$$n = 6$$

$$\text{माध्यिका} = \frac{\left[\left(\frac{n}{2} \right)^{\text{th}} + \left(\frac{n}{2} + 1 \right)^{\text{th}} \right]}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{6}{2} \right)^{\text{th}} + \left(\frac{6}{2} + 1 \right)^{\text{th}}}{2} = \frac{3^{\text{rd}} + 4^{\text{th}}}{2}$$

$$= \frac{5 + 6}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

प्रश्न 14. 3.2, 3.5, 3.2, 3.4, 3.7, 3.7, 3.2, 3.5 का बहुलक ज्ञात करो?

हल- 3.2, 3.5, 3.2, 3.4, 3.7, 3.7, 3.2, 3.5, 3.2 की आवृत्ति 3 सर्वाधिक है।

अतः बहुलक 3.2 है।

प्रश्न 15. उन आंकड़ों के दो उदाहरण दीजिए जो हम अपने दैनिक जीवन में एकत्रित करते हैं?

हल- अपने दैनिक कार्यों से एकत्रित किए जाने वाले आंकड़ों के पांच उदाहरण ये हैं-

- (i) अपनी कक्षा में छात्रों की संख्या।
- (ii) अपने विद्यालय में पंखों की संख्या।
- (iii) पिछले दो वर्षों के घर की विजली का विल।
- (iv) टेलीविजन या समाचार पत्रों से प्राप्त चुनाव के परिणाम।
- (v) शैक्षिक सर्वेक्षण से प्राप्त साक्षरता दर के आंकड़े।

प्रश्न 16. 7.1, 7.3, 7.3, 7.9, 7.4, 7.2, 7.1, 7.5 का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल- अधिकतम मान = 7.9

निम्नतम मान = 7.1

परिसर = अधिकतम मान - निम्नतम मान

$$= 7.9 - 7.1$$

$$= 0.8 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 17. प्रथम पाँच सम प्राकृत संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल- 2, 4, 6, 8, 10

$$\text{माध्य} = \frac{2+4+6+8+10}{5}$$

$$= \frac{30}{5} = 6$$

प्रश्न 18. यदि कक्षा 9वीं के 5 विद्यार्थियों का वजन 45 कि.ग्रा., 50, कि.ग्रा., 40 कि.ग्रा, 48 कि.ग्रा एवं 52 कि.ग्रा. है तो माध्य वजन ज्ञात करो?

$$\text{हल- माध्य} = \frac{\text{समस्त प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

$$= \frac{45 + 50 + 40 + 48 + 52}{5}$$

$$= 235/5 = 47$$

उत्तर

प्रश्न 19. 2 के प्रथम 5 गुणज का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल- 2 के प्रथम 5 गुणज

2, 4, 6, 8, 10

$$\text{माध्य} = \frac{\text{समस्त प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

$$= \frac{2+4+6+8+10}{5}$$

$$= \frac{30}{5} = 6$$

उत्तर

प्रश्न 20. 20 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किये गये अंकों का बहुलक ज्ञात करो।

प्रश्न 21. यदि कक्षा 9 के एक विद्यार्थी के 5 विषय के प्राप्तांकों का योग 50 है तो माध्य ज्ञात करो?

$$\text{हल- माध्य} = \frac{50}{5} = 10$$

प्रश्न 22. 3, 4, 7, 1, 6, 3, 3 का माध्यक तथा बहुलक ज्ञात करो?

हल- आरोही क्रम में लिखने पर- 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7

$$n = 7 \text{ (विषम)}$$

$$= \frac{8}{2} = 4 \text{वां पद}$$

$$= 3 \text{ (माध्यिका)}$$

3 की आवृत्ति सर्वाधिक है, अतः बहुलक 3 है।

प्रश्न 23. यदि 9वीं कक्षा के किसी विद्यार्थी के वार्षिक परीक्षा में 72 प्रतिशत आते हैं तो उसके 6 विषयों का योगफल कितना होगा?

हल- $72 \times 6 = 432$ अंक.

प्रश्न 24. 12 के गुणनखंडों का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल- 12 के गुणन खण्ड

$$= 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

$$\text{माध्य} = \frac{1+2+3+4+6+12}{6}$$

$$= \frac{28}{6}$$

$$= \frac{14}{3} = 4.66 = 4.67$$

प्रश्न 25. प्रथम 5 प्राकृत संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल- प्रथम 5 प्राकृतिक संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{आंकड़ों का योग}}{\text{आंकड़ों की संख्या}}$$

$$= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5}$$

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\text{समान्तर माध्य} = 3$$

प्रश्न 26. 8वीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों के रक्त समूह निम्न हैं- A, B, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, O, O, A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O इन आंकड़ों को एक बारंबारता बटन सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए। बताईये कि इन विद्यार्थियों में कौन-सा रक्त समूह अधिक सामान्य और कौन-सा रक्त समूह विरलतम रक्त समूह है?

हल-	रक्त समूह	विद्यार्थियों की संख्या
	A	9
	B	6
	O	12
	AB	3
	कुल योग	30

$$\text{अधिक सामान्य रक्त समूह} = O$$

$$\text{विरलतम रक्त समूह} = AB$$

प्रश्न 27. एक टीम में फुटबाल के 10 मैचों में निम्नलिखित गोल किये- 2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3 इन गोलों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए?

हल- देखिए अ.ल.उ. प्रश्न 7

प्रश्न 28. गणित की परीक्षा में 15 विद्यार्थियों ने निम्नलिखित अंक प्राप्त किये-

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60 इन आंकड़ों के माध्य, माध्यक एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल- देखिए अ.ल.उ. प्रश्न 8

प्रश्न 29. एक परिवार में जिसकी मासिक आय रूपये 20,000/- है, विभिन्न मदों के अंतर्गत हर महीने होने वाले खर्चे की योजना बनाई थी-

मद	खर्च (हजार रुपये में)
ग्रासरी (परचून का सामान)	4
किराया	5

बच्चों की शिक्षा

5

दलाइंगरां

2

ईशन

2

मनोरंजन

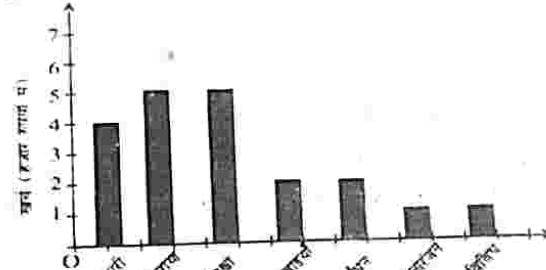
1

विविध

1

ऊपर दिये गये आंकड़ों का एक दंड आलेख बनाइये।

हल-



प्रश्न 30. तीन सिक्कों को एक साथ 30 बार उछाला गया।

प्रत्येक बार चिन्त आने की संख्या निम्न है-

0, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 0, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 0, 1, 2, 1, 3, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 2, 2, 0

ऊपर दिये गये आंकड़ों के लिये एक बारंबारता बटन सारणी बनाइये।

हल-

सिक्कों की संख्या	मिलान चिन्ह	बारंबारता
0		6
1		10
2		9
3		5
कुल योग		30

प्रश्न 31. एक विद्यालय के 9वीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों द्वारा (100 में से) प्राप्त किये गये अंक दिये गये हैं-

10, 20, 36, 92, 95, 40, 50, 56, 60, 70, 92, 88, 80, 70, 72, 70, 36, 40, 36, 40, 92, 40, 50, 50, 56, 60, 70, 60, 60, 88

उपरोक्त आंकड़ों से बारंबारता बटन सारणी बनाइए।

हल-

अंक	विद्यार्थियों की संख्या (अर्थात् बारंबारता)
10	1
20	1
30	3

40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
कुल योग	50

प्रश्न क्र. 32. एक स्थानीय टेलीफोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (सरनेम) यदृच्छया (रेंडमली) लिये गये और उनमें अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्न बारंबारत बंटन प्राप्त किया गया-

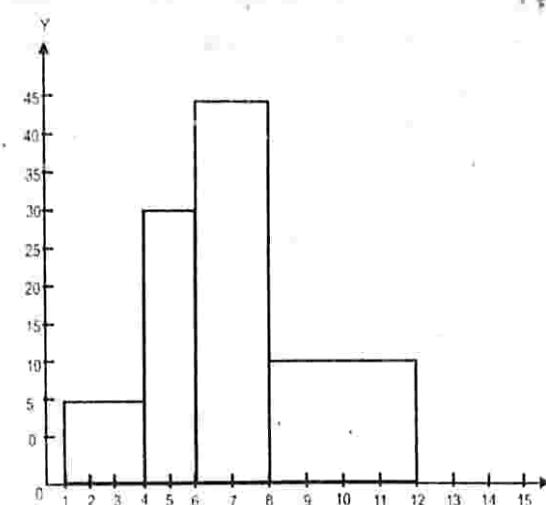
वर्णमाला के अक्षरों की संख्या	कुल नामों (सरनेम) की संख्या
1-4	6
4-6	30
6-8	44
8-12	16
12-20	4

दी गई सूचनाओं को निरूपित करने वाला एक आयत चित्र खींचिए एवं वह वर्ग अंतराल बताइये जिसमें अधिकतम संख्या में कुल नाम हैं?

हल-

वर्णमाला के अक्षरों की सं.	कुलनामों की संख्या	अंतराल की चौड़ाई	आयत की लम्बाई
1- 4	6	$4-1 = 3$	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4-6	30	$6-4 = 2$	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6-8	44	$8-6 = 2$	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8-12	16	$12-8=4$	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12-20	4	$20-12=8$	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

हल-(2)



वर्णमाला के अक्षरों की संख्या →

प्रश्न 33. निम्न सारणी से फैक्ट्री में काम कर रहे 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन ज्ञात कीजिए।

वेतन रूपयों में	कर्मचारियों की संख्या
3000	16
4000	12
5000	10
6000	8
7000	6
8000	4
9000	3
10000	2

हल-

वेतन (₹ में)	कर्मचारियों की संख्या
(x_1)	(f_1)
3000	16
4000	12
5000	10
6000	8
7000	6
8000	4
9000	3
10000	1

$$\text{कुल योग } \sum_{i=1}^8 f_i = 60 \quad \sum_{i=1}^8 f_i \times x_i = 305000$$

$$\text{माध्य वेतन} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{305000}{60} = ₹ 5083.33$$

अतः कर्मचारियों का माध्य वेतन ₹ 5083.33 है।

प्रश्न 34. निम्नलिखित प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है, यदि आंकड़ों का माध्यक 63 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

$$29, 32, 48, 50, x, x+2, 72, 78, 84, 95$$

हल- प्रेक्षणों की संख्या (n) = 10 (सम संख्या)

$$\begin{aligned} \text{माध्यक} &= \frac{\left(\frac{n}{2}\right) \text{वेदान्त} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) \text{नो वेदान्त}}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{10}{2}\right) \text{वेदान्त} + \left(\frac{10+1}{2}\right) \text{नो वेदान्त}}{2} \\ &= \frac{5 \text{वेदान्त} + 6 \text{वेदान्त}}{2} = \frac{x+x+2}{2} \\ &= \frac{2x+2}{2} = \frac{2(x+1)}{2} = x+1 \end{aligned}$$

दिया है माध्यक = 63

$$x+1 = 63$$

$$x = 63 - 1$$

$$x = 62$$

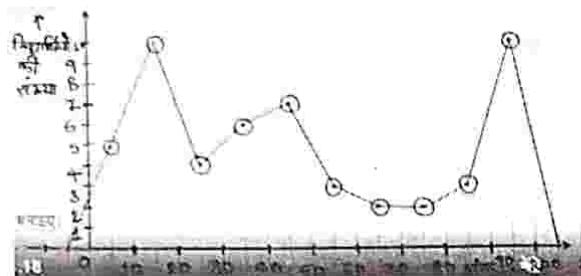
अतः x का मान 62 है।

प्रश्न 35. एक परीक्षा में एक कक्षा के 51 विद्यार्थियों द्वारा 100% से ऊपर किये गये अंक निम्न सारणी में दिये गये हैं-

अंक	विद्यार्थियों की संख्या	आयु (वर्षों में)	बच्चों की संख्या	अंतराल की चौड़ाई	आयत की लंबाई
0-10	5	2-3	3	1	$\frac{5}{1} \times 1 = 5$
10-20	10	3-5	6	2	$\frac{10}{2} \times 1 = 3$
20-30	4	5-7	12	2	$\frac{4}{2} \times 1 = 2$
30-40	6	7-10	9	3	$\frac{6}{3} \times 1 = 2$
40-50	7	10-15	10	5	$\frac{7}{5} \times 1 = 2$
50-60	3	15-17	4	2	$\frac{3}{2} \times 1 = 1.5$
60-70	2				
70-80	2				
80-90	3				
90-100	9				
कुल योग	51				

इस बारंबारता बटन सारणी के संगत बारंबारता बहुजन बनाई जाए।

हल- एक परीक्षा में एक कक्षा के 51 विद्यार्थियों द्वारा 100 में से प्राप्त किए अंग निम्न सारणी में दिए गए हैं-

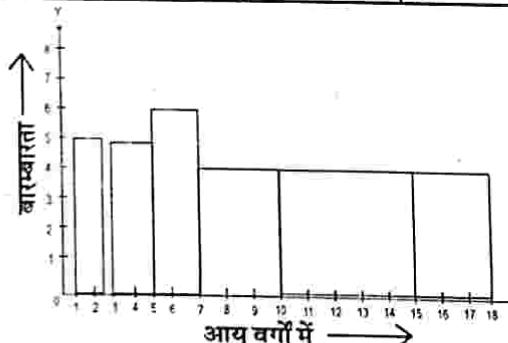


प्रश्न 36. एक पार्क में खेल रहे विभिन्न आयु वर्ग के बच्चों की संख्या का एक यदृच्छिक सर्वेक्षण (रेडम सर्वे) करने पर निम्नलिखित आंकड़े प्राप्त हुए-

आयु (वर्षों में)	1-2	2-3	3-5	5-7	7-10	10-15	15-17
बच्चों की संख्या	5	3	6	12	9	10	4

उपरोक्त दिए गये आंकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयत चित्र बनाई जाए।

हल-



प्रश्न 37. एक पौधे की 40 पत्तियों की लंबाईयां 1 मिमी तक शुद्ध मापी गई हैं और प्राप्त आंकड़ों को निम्नलिखित सारणी में निरूपित किया गया है-

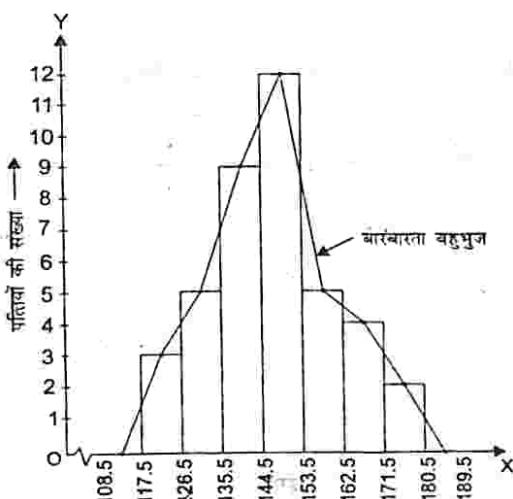
लंबाई (मिमी में)	पत्तियों की संख्या
118-126	3
127-135	5
136-144	9
145-153	12
154-162	5
163-171	4
172-180	2

दिये हुए आंकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयत चित्र खोंचिये।

हल-(1) हमें दिया गया बारंबारता बंटन सतत नहीं है। पहले हम इसे सतत बारंबारता बंटन में बदलेंगे एक वर्ग की निम्न सीमा और उससे पहले वर्ग की उच्च सीमा का अन्तर 1 है, अर्थात् इस बारंबारता बंटन को सतत बनाने के लिए, हम प्रत्येक वर्ग की निम्न सीमा में से $\frac{h}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$ घटायेंगे और प्रत्येक उच्च सीमा में 0.5 जोड़ेंगे। अतः जो बंटन हमें मिलेगा वह नीचे दिया गया है।

लंबाई (मिमी मीटर में)	पत्तियों की संख्या
117.5 - 126.5	3
126.5 - 135.5	5
135.5 - 144.5	9
144.5 - 153.5	12
153.5 - 162.5	5
162.5 - 171.5	4
171.5 - 180.5	2

हल-(2) इन्हें बारंबारता बहुभुज द्वारा निरूपित कर सकते हैं।



हल-(3) नहीं, सबसे अधिक लम्बाई वाली पत्तियों की संख्या 145-153 में स्थित है।

प्रश्न 38.30 दिन वाले महीने में एक नगर सापेक्ष आर्द्रता (प्रतिशत) में निम्न है-

98.1, 98.6, 99.2, 90.3, 86.5, 95.3, 92.9, 96.3, 94.2, 95.1, 89.2, 92.3, 97.1, 93.5, 92.7, 95.1, 97.2, 93.3, 95.2, 97.3, 96.2, 92.1, 84.9, 90.2, 95.2, 98.3, 97.3, 96.1, 92.1, 89

(अ) वर्ग 84-86 और 86-88 आदि वर्गान्तर लेकर एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाईये।

(ब) इन आंकड़ों का परिसर क्या है?

हल-(1)

सापेक्ष आर्द्रता %	मिलान चिन्ह	बारंबारता
84-86		1
86-88		1
88-90		2
90-92		2
92-94		7
94-96		6
96-98		7
98-100		4
कुल योग		30

(2) आंकड़ों में आर्द्रता अधिक है। अतः ये आंकड़े वर्षा ऋतु से संबंधित हैं।

(3) परिसर = अधिकतम मान - न्यूनतम मान

$$= 99.2 - 84.9 = 14.3\%$$

प्रश्न 39. एक कंपनी एक विशेष प्रकार का बैटरी बनाती है। इस प्रकार की 40 बैटरियों की जीवनकाल (वर्षों में) निम्न है-

2.6, 3.0, 3.7, 3.2, 2.2, 4.1, 3.5, 4.5, 3.5, 2.3, 3.4, 3.8, 3.2, 4.6, 3.7, 2.5, 4.4, 3.4, 3.3, 2.9, 3.0, 4.3, 2.8, 3.5, 3.2, 3.9, 3.2, 3.2, 3.1, 3.7, 3.4, 4.6, 3.8, 3.2, 2.6, 3.5, 4.2, 2.9 और 3.6
0.5 माप के वर्ग अंतराल लेकर तथा अंतराल 2-2.5 से प्रारंभ करके इन आंकड़ों की एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाईये।

हल-

बैटरियों का जीवन काल	मिलान चिन्ह	बारंबारता
2.0 - 2.5		2

2.5-3.0		6
3.0-3.5		14
3.5-4.0		11
4.0-4.5		4
4.5-5.0		3
कुल योग		40

प्रश्न 40.40 इंजीनियरों की उनके आवास से कार्य स्थल
की दूरियाँ निम्न हैं-

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

0-5 (जिसमें 5 सम्प्लित नहीं) को पहला अंतराल लेकर
जपर दिए हुए आंकड़ों से वर्ग माप 5 वाली एक वर्गीकृत
बारंबारता बैंटन सारणी बनाइए।

हल-

दूरी (किमी.)	मिलान चिन्ह	बारंबारता
0-15		5
5-10		11
10-15		11
15-20		9
20-25		1
25-30		1
30-35		2
कुल योग		40

(1) अधिकतम इंजीनियरों की आवास से कार्य स्थल की दूरियाँ वर्ग-अंतराल 5-10 तथा 10-15 में हैं।

(2) न्यूनतम इंजीनियरों की आवास से कार्यस्थल की दूरियाँ वर्ग अंतराल 20-25 तथा 25-30 में हैं।

www.jcdclasses.com

यद्यपि उत्तरमाला के निर्माण में पूरी सावधानी रखी गयी है परन्तु संशय की स्थिति में विषय शिक्षक से सम्पर्क करके निवारण कर लें।

Note

www.jcdclasses.com

आमुख

शालाओं के समय-समय पर विभागीय अधिकारियों द्वारा किये गये निरीक्षण के दौरान यह देखा गया है कि छात्र-छात्राओं दो विषय में ज्ञान का स्तर संतोषजनक नहीं है।

आगामी परीक्षा की तैयारी एवं श्रेष्ठ परीक्षा परिणाम हेतु यह प्रश्न बैंक तैयार किया गया है। जिसके उपयोग से शिक्षक अपने समस्त छात्रों को बेहतर अंक प्राप्त करने एवं अगली कक्षा में जाने हेतु समर्थ बना सकेंगे।

इस प्रश्न बैंक को ब्लूप्रिन्ट के अनुसार उन महत्वपूर्ण पाठ्य वस्तुओं का समावेश कर तैयार किया गया है जो कि प्रभावी शिक्षण एवं छात्र-छात्राओं के सभी विषय में औसत दक्षता विकसित करने एवं परीक्षा परिणाम में सुधार हेतु लाभकारी सिद्ध होगा।

यदि आपके स्कूल में एक से अधिक सेक्षण हैं तो विद्यार्थियों के ग्रेड के आधार पर सेक्षण में विद्यार्थियों का पुनर्वितरण कर दें। तथा एक ग्रेड के विद्यार्थियों को एक सेक्षण में रखें ताकि उन विद्यार्थियों को उनके स्तर के अनुरूप पढ़ाया जाये।

प्रदेश के समस्त हाई/हायर सेकेन्डरी स्कूलों के प्राचार्य एवं संबंधित शिक्षकों से अपेक्षा ही नहीं बल्कि पूरा विषय से ही कि इस प्रश्न बैंक से शाला के छात्र-छात्राओं के सभी विषय का नियमित अभ्यास करायें ताकि प्रत्येक विद्यार्थी परीक्षा में सफल हो सके।

शिक्षकों से अपेक्षित कार्यवाही— डी एवं ई ग्रेड के विद्यार्थियों को आगामी 2 माह तक इस प्रश्न बैंक अनुसार अभ्यास कराएं। विद्यार्थियों को प्रत्येक प्रश्न को किस तरह लिखना है इसे समझाएं। विद्यार्थियों द्वारा की जा रही गलतीयों को सुधारें।

कक्षा 9 से 12 के लिए हिन्दी एवं अंग्रेजी माध्यम में उपलब्ध



Gupta Book Industries (P) Ltd.

623, M.G.Road Khajuri Bazar Indore

Tel : +91 731 2454921 -22 Fax : 2454922

Web : www.gbpl.com

Email : gphbooks@outlook.com

PRICE: ₹ 55.00

